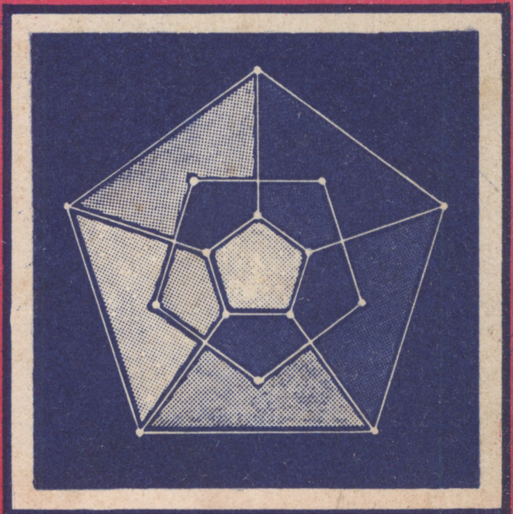
НОВОЕ
В ЖИЗНИ, НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

ЗНАНИЕ

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ



9/1975

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКА,
КИБЕРНЕТИКА

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

СБОРНИК

(Перевод с английского)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1975

П 78

П 78 Проблемы современной математики. Сборник. Пер. с англ. М., «Знание», 1975.

64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 9. Издается ежемесячно с 1967 г.)

Предлагаемый читателю сборник состоит из трех статей по наглядной геометрии. Первая из них представляет обзор результатов, относящихся к знаменитой задаче о четырех красках, вторая посвящена алгебраическим вопросам, связанным с разбиениями n-мерного пространства, и третья — экстремальной геометрической задаче.

Брошюра рассчитана на студентов-математиков младших курсов и лиц, интересующихся математикой.

П $\frac{20201-173}{073(02)-75}$ 52—75 51

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Элементарная, так называемая синтетическая, геометрия, или, как некоторые математики, например Гильберт и Кон-Фоссен, называли ее наглядная геометрия, является одной из красивейших областей математики.

Некоторые вопросы математики уже сами собой относятся к наглядной геометрии, например теория многогранников. Сюда же можно отнести всю геометрическую кристаллографию. При изучении других вопросов казалось, что геометрия при их решении не играет никакой роли. Таковыми, в частности, были некоторые важнейшие вопросы элементарной и алгебраической теории чисел, например, теория автоморфизмов квадратичных форм и теория приведения, теория алгебраических единиц и многое другое. Но еще в первой половине прошлого века Гаусс и Дирихле отмечали, что некоторые из этих вопросов, по существу, являются геометрическими.

На рубеже XIX и XX веков Минковский и Вороной создали новую большую область — геометрию чисел, в которой многие трудные вопросы теории чисел решаются методами геометрии. Укажем следующий пример: долгое время теорема Дирихле об алгебраических единицах считалась одной из самых трудных теорем всей математики. А сейчас в геометрическом изложении она становится совсем наглядной.

В настоящий сборник включены переводы трех статей, относящихся к наглядной геометрии. Первая из них, принадлежащая известному специалисту в прикладных вопросах математики, — это обзор результатов, относящихся к знаменитой задаче о четырех красках, состоящей в следующем. Пусть дана карта некоторой страны, разбитой на области. Верно ли, что всегда хватит четырех красок для того, чтобы раскрасить эти области так, что никакие две соседние по части своей границы области не были одного и того же цвета? Как ни удивительно, ответ на этот вопрос до сих пор неизвестен.

Во второй статье излагается одна известная задача, также имеющая долгую историю. Пусть n-мерное пространство заполнено все без промежутков одинаковыми и параллельными n-мерными кубиками, центры которых образуют решетку. Известное предположение Минковского состояло в том, что такое разбиение на кубики всегда устроено так: из кубиков сначала составляем одномерные и параллельные между собой колонки; прикладывая эти колонки друг к другу по целым граням (граням колонок, но не кубиков), составляем бесконечный двумерный слой, в котором любые две соседние колонки одинаково смещены друг по отношению к другу; на этот слой укладываем равные и параллельные ему слои так, что любые соседние слои также одинаково смещены друг по отношению к другу и т. д. Эта геометрическая проблема была решена недавно скончавшимся венгерским математиком Хайошем при помощи привлечения алгебраических средств. Как мы несколько лет тому назад говорили с Хайошем, было бы очень интересно доказать эту гипотезу Минковского чисто геометрически.

В третьей статье известного венгерского геометра Л. Фейеша Тота рассматривается одна экстремальная геометрическая задача, которая представляет собой образчик тех вопросов, которыми активно занимаются венгерские геометры в настоящее время.

Необходимо отметить, что переводы статей публикуются с сокращениями, а статья о проблеме четырех красок помимо этого с некоторыми изменениями, внесенными с целью сделать ее более доступной широкому кругу читателей.

Можно только приветствовать опубликование настоящего сборника, посвященного разнообразным и интересным вопросам геометрии.

Член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*

Томас Саати*

ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Тщательно проанализировав информацию, касающуюся происхождения гипотезы четырех красок, можно заключить, что где-то между 1850 и 1852 годами один лондонский бакалавр Френсис Газри, закрашивая карту Англии, безуспешно пытался доказать, что для этого всегда достаточно четырех красок. Его младший брат Фредерик сообщил об этом предположении профессору де Моргану в октябре 1852 года.

Это предположение заинтересовало де Моргана, он обдумал его и сообщил своим студентам и некоторым другим математикам, отдавая при этом должное Френсису Газри. В 1878 году в «Трудах Лондонского математического общества» появилась первая печатная ссылка на эту гипотезу. Автор заметки Кэли интересовался, не была ли эта гипотеза доказана раньше. Это послужило толчком к многочисленным и чрезвычайно разнообразным исследованиям, в результате которых возник целый ряд эквивалентных модификаций, гипотез и ошибочных доказательств. К настоящему моменту довольно широкий круг вопросов остается открытым, хотя известно, что гипотеза верна для любой карты, состоящей не более чем из 41 страны.

Цель этой статьи — дать концентрированное изложение эквивалентных форм гипотезы. Для краткости доказательства будут опущены.

Некоторые модификации этой гипотезы, представленные здесь, можно найти в любой книге по этому вопросу. Другие же находятся только в некоторых, но не во всех. Но хотя даже эта коллекция не может быть полной, я все же на-

* Т. Саати — профессор Пенсильванского университета. Его интересы — теория графов, оптимизация, приложения математики к социальным вопросам. Он автор, соавтор или редактор 13 книг по математике и ее приложениям.

деюсь, что концентрированная и упорядоченная подача материала сможет дать интересующемуся читателю понимание глубины и разнообразия многочисленных исследований этой проблемы разными математиками.

Мы сознательно не касаемся здесь важных областей теории графов, которые не имеют прямого отношения к обсуждаемой гипотезе. Иначе этой работе не было бы конца.

Глава 1. ТЕМА

Граф G состоит из конечного множества *вершин* v_1, v_2, ..., v_n. При этом некоторые вершины могут быть связаны попарно *ребрами*. Если вершины u и v связаны ребром

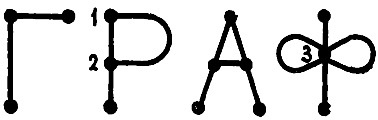


Рис. 1

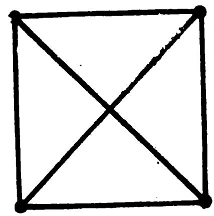


Рис. 2

e (инцидентны с этим ребром), то говорят в таком случае, что вершины u и v—*смежные*. Говорят также, что эти вершины являются *концами* ребра e. Два ребра с общей вершиной также называются *смежными*. Вообще говоря, две вершины могут соединяться между собой несколькими ребрами (*параллельные* ребра). Так, в графе (рис. 1) вершины *1* и *2* соединяются двумя ребрами. Более того, ребро может быть *петлей* в том смысле, что оба конца ребра совпадают. Так, на рис. 1 с вершиной *3* инцидентны две петли.

Граф называется *простым*, если в нем нет ни петель, ни параллельных ребер.

Путь графа — это последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершинами, причем вершины и ребра чередуются, и каждое ребро инцидентно вершине, как непосредственно предшествующей (в этой последовательности), так и непосредственно следующей за ней. Путь вида v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_n соединяет вершины v_0 и v_n.

Путь, в котором все ребра различны, называется *цепью*.

Если в цепи все вершины различны, то она *элементарна.*

Цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, т. е. $v_0 = v_n$, называется *циклом*. *Элементарный* цикл — это такая цепь, в которой $v_0 = v_n$, но все другие

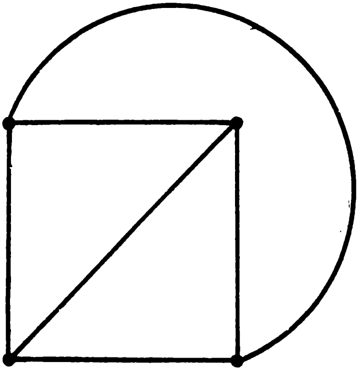


Рис. 3

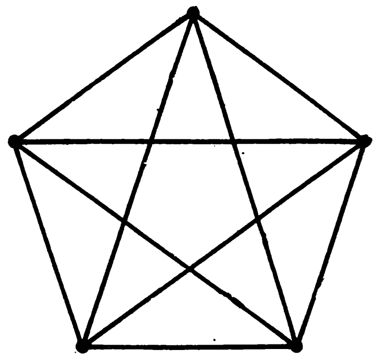


Рис. 4

вершины попарно различны. Число ребер графа, инцидентных данной вершине, называется *степенью* этой вершины.

Введем важное определение. Граф называется *планарным*, если он может быть нарисован на плоскости или на сфере (т. е. поверхности шара) так, что любые два ребра (линии) пересекаются лишь в вершинах. Граф на четырех вершинах, изображенный на рис. 2, на первый взгляд не является планарным. Но поскольку связывающие ребра (линии) данного графа можно провести иначе, например, как показано на рис. 3, то этот граф является планарным.

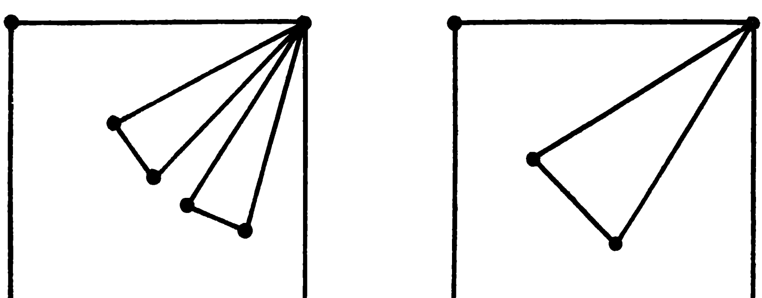


Рис. 5

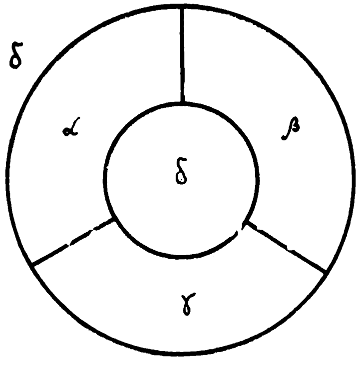


Рис. 6

А вот граф на пяти вершинах, изображенный на рис. 4, уже не является планарным, потому что доказано, что как бы ни рисовали этот граф на плоскости или сфере, некоторые его ребра будут обязательно пересекаться.

Долгое время характеризация планарных графов была труднейшей проблемой. В 1927 году Л. С. Понтрягин доказал (но не опубликовал) критерий планарности. В 1930 году Куратовский независимо от Понтрягина получил и опубликовал этот результат (к этому критерию мы еще вернемся).

Если планарный граф G нарисовать на плоскости, то ребра графа разбивают плоскость на связные куски так называемые *области*, или *страны*. Вот такое разбиение плоскости и есть *карта* M, точнее *планарная карта*.

Когда карта M получается таким образом с помощью графа G, то говорят, что G — *опорный* граф для карты M, и обозначают $G = U(M)$.

Две области *смежны*, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро, но не просто общую точку. Ребра границы области еще называют *сторонами*.

Стоит обратить внимание на то, что планарный граф может быть размещен на плоскости различными способами, порождающими, в свою очередь, различные карты. Например, граф, состоящий из квадрата и двух треугольников, имеющих одну общую вершину, может быть размещен несколькими способами. Как показано на рис. 5, в одном случае оба треугольника лежат внутри квадрата, в другом один треугольник — внутри квадрата, а второй — снаружи. Ясно, что на второй карте нет четырехсторонней области, в то время как на первой — бесконечная, внешняя по отношению к квадрату, имеет четыре стороны.

Раскраска карты в k *цветов* — это окрашивание каждой области карты одним из k цветов так, чтобы никакие две смежные области не были окрашены одинаковым цветом.

Сформулируем теперь гипотезу четырех красок, которая принадлежит Френсису Газри и может по праву быть названа гипотезой Газри.

Гипотеза четырех красок. *Всякая планарная карта допускает раскраску в четыре цвета.*

То, что цветов для некоторых карт нужно не меньше четырех, видно на рис. 6.

Глава 2. ВАРИАЦИИ

Дуальность и раскраска

С помощью данной карты M можно построить другой, вполне определенный, так называемый *дуальный* граф D (M). Для этого заменим каждую область карты M вершиной (*столицей*) и соединим каждые две столицы столькими параллельными ребрами, сколько общих ребер опорного графа карты M содержится в границах обеих областей (рис. 7). Ребро, которое лежит на границе только одной

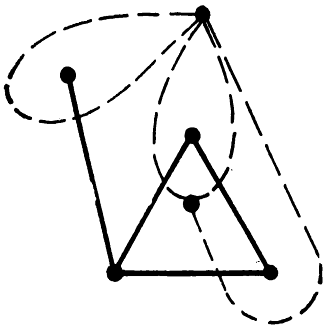


Рис. 7

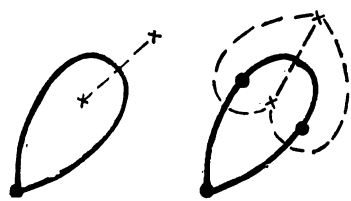


Рис. 8

области в M, порождает петлю в дуальном графе. Дуальный граф данной карты, в свою очередь, является опорным графом другой (дуальной) карты.

В связи с введением понятия дуального графа определим *раскраску графа в k цветов.* Это — окрашивание каждой вершины графа одним из k цветов так, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одинаковым цветом.

Вполне очевидно, что карта допускает раскраску в k цветов тогда и только тогда, когда этим свойством обладает дуальный ей граф.

Опорный граф $U(M)$ какой-нибудь карты M может иметь параллельные ребра и петли. В таком случае, вводя подходящим способом новые вершины (степени 2), можно разделить некоторые ребра так, что получится новая карта M' (с теми же областями, но новыми сторонами), для которой опорный граф $U(M')$ является простым. Ясно, что если карта M допускает раскраску в четыре цвета, то и карта M' также раскрашивается четырьмя цветами.

Итак, при раскрашивании карты M можно всегда предполагать, что граф $U(M)$ простой. Однако, делая граф $U(M)$ простым, мы можем получить, что граф $D(M)$ не будет простым. Например, если $U(M)$ есть просто петля, то $D(M)$ есть простое ребро. Но деление петли $U(M)$ влечет появление в дуальном графе параллельных ребер (рис. 8).

Пусть G — граф. Обозначим через $S(G)$ простой граф, полученный из G путем выкидывания петель и замены параллельных ребер простым ребром. Понятно, что граф G допускает раскраску в k цветов тогда и только тогда, когда этим свойством обладает простой граф $S(G)$.

Гипотеза 1. *Каждый планарный граф допускает раскраску в четыре цвета.*

Эквивалентность этой гипотезы гипотезе четырех красок следует из определения дуального графа и из результата Уитни, что если карта M планарна, то и дуальный ей граф $D(M)$ также планарный.

Обычно говорят, что граф *полный*, если каждая его вершина связана с каждой другой вершиной ребром. Из того что полный граф с пятью вершинами (см. рис. 4) не является планарным, следует, что не существует планарных карт, на которых пять стран были бы попарно между собой смежными.

Хивуду принадлежит удивительно простое, индуктивное по числу областей доказательство теоремы о том, что любая планарная карта может быть окрашена в пять цветов. Доказательство этой теоремы служит замечательным образцом тех многочисленных изобретательных попыток, которые были предприняты для решения проблемы четырех красок. Доказательство мы приведем позже. Сейчас же воспользуемся методом Хивуда для того, чтобы показать, что любая область на планарной неприводимой карте имеет пять или более сторон. Карта называется *неприводимой*, если она не может быть раскрашена менее чем пятью красками в то время, как любая планарная карта с меньшим числом областей раскрашивается четырьмя или меньшим числом красок.

Заметим, в частности, что всякая карта, состоящая не более чем из 12 областей, содержит хотя бы одну область не более чем с четырьмя сторонами. Чтобы убедиться в этом, предположим, что в карте имеется n вершин, m ребер и r областей. Знаменитая формула Эйлера связывает эти числа соотношением:

$$n - m + r = 2. \tag{1}$$

Не ограничивая, по существу, общности, можно предполагать, что на карте M нет вершин степени 1 или 2. Так как у каждого ребра—две концевые вершины (которые могут совпадать) и степень каждой вершины не меньше 3, то справедливо неравенство $3n \leqslant 2m$. А если допустить, что каждая область карты ограничена по меньшей мере пятью ребрами, то легко вывести $5r \leqslant 2m$. Подставляя в формулу (1) вместо n большее значение $2m/3$ и точно так же вместо r — $2m/5$, получаем $2m/3 - m + 2m/5 \geqslant 2$, т. е. $m \geqslant 30$. Подстановка в формулу (1) только одного неравенства $3n \leqslant 2m$ дает $m \leqslant 3r - 6$. Поэтому если предположить, что число областей на карте меньше 12, то $m < 30$. Это противоречит неравенству $m \geqslant 30$, которое являлось следствием допущения, что в карте все области ограничены как минимум пятью ребрами. Значит, можно считать доказанным: если на карте менее 12 областей, то хотя бы одна область ограничена самое большее четырьмя сторонами.

Поставленную задачу о том, что любая область на неприводимой карте M имеет не меньше пяти сторон, будем рассматривать в терминах дуального графа D (M). Предположим, что граф D (M) содержит вершину степени 3 или 4, которую обозначим через v. Поскольку по предположению карта M неприводима, то после выбрасывания из графа D (M) вершины v и инцидентных с ней ребер вершины оставшегося графа $D - v$ можно раскрасить четырьмя красками. Если вершина v была смежна не более чем с тремя вершинами из уже раскрашенного графа $D - v$, то, закрашивая ее одной из четырех красок, отличной от тех, которыми окрашены три смежные вершины, получаем раскрашенный в четыре цвета граф D (M), что противоречит условию неприводимости карты M.

Рассмотрим теперь случай, когда вершина v смежна с четырьмя вершинами. Если мы опять выбросим v с инцидентными ей ребрами, то вершины оставшегося графа $D - v$ можно по предположению окрасить в четыре цвета, которые обозначим через c_1, c_2, c_3, c_4. Понятно, что при такой четырехцветной раскраске графа $D - v$ вершины v_1, v_2, v_3, v_4, смежные с вершиной v, должны быть раскрашены каждая в свой цвет, иначе и граф D (M) допускал бы четырехцветную раскраску.

Пусть смежные вершины v_1, v_2, v_3, v_4, окрашенные соответственно в цвета c_1, c_2, c_3, c_4, циклически упорядочены (скажем, по направлению часовой стрелки; рис. 9). Это всегда можно сделать, занумеровав соответствующим спо-

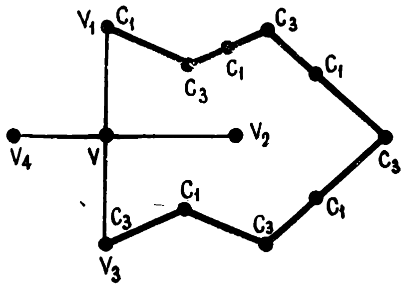


Рис. 9

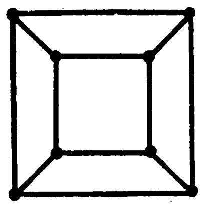


Рис. 10

собом смежные вершины и перенумеровав, если нужно, цвета.

Обозначим через D_{13} подграф графа $D - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в один из цветов c_1 и c_3. Другими словами, D_{13} — это такой граф, множество вершин которого совпадает с подмножеством вершин графа $D - v$, окрашенными либо в c_1, либо в c_3, а множество ребер графа D_{13} — это множество тех ребер из графа $D - v$, которые соединяют такие вершины. Граф D_{13} может быть *несвязным*, т. е. не каждая пара его вершин может быть соединена цепочкой. Тогда граф D_{13} разбивается на множество *связных* подграфов (компонент). В каждой такой связной компоненте любые две вершины уже соединяются цепочкой. Если вершины v_1 и v_3 принадлежат при этом разным компонентам, то граф D_{13} можно перекрасить в те же четыре цвета, поменяв для этого друг с другом цвета c_1 и c_3 вершин только в компоненте графа D_{13}, содержащей вершину v_1. Тогда вершина v_1 перекрасится в цвет c_3, а цвет c_1 освободится для окраски вершины v.

Рассмотрим теперь случай, когда вершины v_1, и v_3 принадлежат одной компоненте графа D_{13}. Тогда в графе D_{13} имеется элементарная цепочка, соединяющая v_1 с v_3, все вершины которой окрашены попеременно в цвета

c_1 и c_3. Поэтому не может быть цепочки в графе $D - v$, идущей из v_2 в v_4, вершины которой окрашены попеременно в цвета c_2 и c_4. Действительно, любая такая цепочка, идущая из v_2 в v_4, должна пересекаться в некоторой вершине с первой цепочкой, вершины которой уже раскрашены либо в c_1, либо в c_3. Поэтому, рассматривая подграф D_{24} графа $D - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в цвета c_2 и c_4, имеем, что вершины v_2 и v_4 принадлежат различным его компонентам. Меняя между собой цвета c_2 и c_4 вершин той компоненты подграфа D_{24}, которая содержит вершину v_2, высвобождаем цвет c_2 для вершины v. Таким образом, предположение, что неприводимый граф имеет хотя бы одну вершину степени меньше пяти, приводит к противоречию. Этим завершается доказательство.

Заметим, что на любой планарной карте всегда есть хотя бы одна область, ограниченная пятью или меньшим числом ребер. Иначе бы мы имели наряду с уже встречавшимся неравенством $3n \leqslant 2m$ другое неравенство $6r \leqslant 2m$, подстановка которых в формулу Эйлера дает противоречие:

$$0 = 2m/3 - m + 2m/6 \geqslant 2.$$

Следовательно, в дуальном планарном графе всегда имеется вершина не более чем с пятью соседними вершинами. В последней главе, слегка изменив вышеописанный метод и применив его индуктивно к вершине дуального графа, имеющей не более пяти соседей, докажем теорему Хивуда о том, что всякий планарный граф допускает раскраску в пять цветов.

Но главная проблема состоит, конечно, в том, чтобы показать, что всякий планарный граф допускает четырехцветную раскраску.

Кубические карты

Граф называется *кубическим*, если все его вершины имеют степень 3. Соответственно карта, по определению, кубическая, если ее опорный граф кубический (рис. 10).

Как уже говорилось, граф называется *связным*, если любые две его вершины соединены цепочкой. Некоторые связные графы при удалении из него какого-нибудь ребра («моста») становятся несвязными (рис. 11).

В связи с этим ребро e называется *мостом* в графе, когда множество вершин графа можно разбить на два (непересекающихся) подмножества T и U, причем такие, что e есть единственное ребро, у которого один конец принадлежит T, а другой — U.

Очевидно, если в связном графе G нет мостов, то удаление из него любого одного ребра приводит к графу, ко-

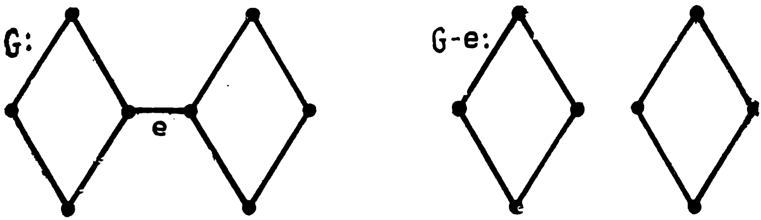


Рис. 11

торый является по-прежнему связным. Граф G, говорят в таком случае, — *дважды связный* или *бисвязный*.

Заметим, что в кубическом графе петля считается дважды. Кубический граф с петлей обязательно содержит мост.

При раскрашивании карты мы можем предполагать, что в ее опорном графе нет мостов. В самом деле, очевидно, что ребро e будет мостом в том и только в том случае, если оно не лежит ни в одном цикле. Поэтому ребро e опорного графа U (M) карты M является мостом тогда и только тогда, когда ребро e лежит на границе только одной области. Тогда, стягивая в карте M каждый мост в точку, получим новую карту M', которая может быть раскрашена четырьмя цветами тогда и только тогда, когда исходная карта M допускает четырехцветную раскраску (рис. 12).

По данной планарной карте можно построить кубическую. Для этого каждую вершину первоначальной карты нужно заменить многоугольной областью со столькими вершинами, сколько ребер инцидентно этой вершине (рис. 13).

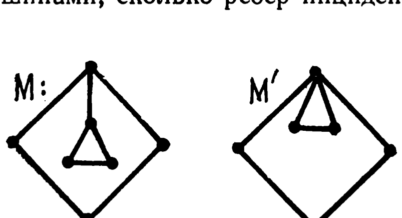


Рис. 12

Из каждой вершины этого многоугольника исходит одно из ребер первоначального графа. Таким образом, степень каждой вершины равна 3; другими словами, новая карта является кубической. Если исходная

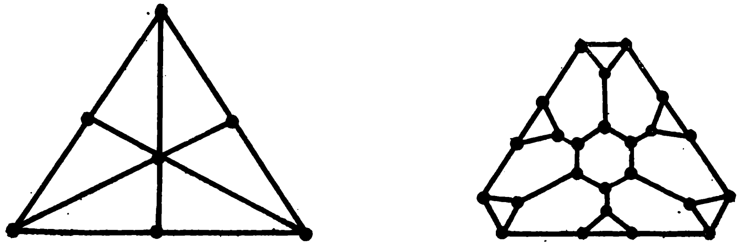


Рис. 13

карта не имела мостов, то мостов не будет и в новой кубической карте. После раскрашивания кубической карты построенные многоугольники можно стянуть в точки и получить, таким образом, раскраску первоначальной общей карты. Поэтому можно высказать эквивалентную гипотезе четырех красок следующую формулировку.

Гипотеза 2. *Каждая кубическая планарная карта, не содержащая мостов, может быть раскрашена в четыре цвета.*

Раскрашивание ребер

Будем говорить, что ребра планарной кубической карты *раскрашены по Тейту*, если все три ребра, инцидентные одной вершине, имеют различные цвета.

Тейтом было установлено, что гипотезе 2 эквивалентна

Гипотеза 3. *Ребра кубической карты, не содержащей мостов, могут быть раскрашены по Тейту в три цвета.*

Кубическая карта с мостом, в частности, когда в ней есть петля, не может быть раскрашена по Тейту.

Карту M естественно называть *треугольной*, если ее дуальный граф $D(M)$ кубический, другими словами, если каждая ее область ограничена в точности тремя ребрами.

Гипотеза 4. *Ребра треугольной карты можно раскрасить в три цвета так, что ребра, ограничивающие каждый треугольник, окрашены в разные цвета.*

Гипотеза 4 является простой модификацией гипотезы 3.

Теперь давайте проследим, как выполняется трехцветная раскраска по Тейту кубической карты, не содержащей мостов, исходя из четырехцветной раскраски областей, а также обратно, как раскрасить области в четыре цвета, отправляясь от трехцветной раскраски по Тейту.

Предположим, что имеется кубическая карта M без мостов, области которой раскрашены в четыре цвета с использованием красок 0, 1, 2, 3. Тогда мы можем раскрасить ребра по Тейту в соответствии со следующей схемой:

Если ребро лежит на границе областей, окрашенных соответственно в цвета:	то ребро окрашивается в цвет
0 и 1 или 2 и 3	α
0 и 2 или 1 и 3	β
1 и 2 или 0 и 3	γ

Легко проверить, что эта схема в действительности работает.

Обратно, предположим, что имеется раскраска по Тейту ребер карты M в три цвета: α, β, γ. Те ребра, которые окрашены в цвета α и β, образуют непересекающиеся элементарные циклы (четной длины), обозначаемые ниже как (α—β)-циклы.

Каждая область R на карте M содержится внутри либо четного, либо нечетного числа (α—β)-циклов. Давайте окрасим предварительно область R в цвет $1'$, если R содержится в нечетном числе (α — β)-циклов, и в цвет $0'$, если R содержится в четном числе (α—β)-циклов. Аналогично мы имеем (α—γ)-циклы, и каждая область R карты M содержится либо в четном, либо в нечетном числе (α—γ)-циклов. В первом случае при предварительной окраске области R мы используем цвет $0''$, а во втором — цвет $2''$. Теперь раскрасим области карты M окончательно по следующей схеме:

Если область была предварительно окрашена в цвета:	то область окончательно окрашивается в цвет:
$0'$ и $0''$	0
$1'$ и $0''$	1
$0'$ и $2''$	2
$1'$ и $2''$	3

Таким образом, каждая область карты предварительно окрашивается дважды и две области окрашиваются окончательно в один и тот же цвет тогда и только тогда, когда их предварительная окраска была одинаковой.

Это порождает правильную раскраску областей. В самом деле, если две области R_1 и R_2 имеют общее ребро e, то e может быть окрашено в любой из цветов α, β или γ. Если e окрашено в β, то ребро e лежит точно в одном $(\alpha - \beta)$-цикле, который содержит либо область R_1, либо область R_2, но не обе одновременно. Следовательно, области R_1 и R_2 предварительно окрашены в цвета $1'$ и $0'$ или $0'$ и $1'$ соответственно. Таким образом, эти области не могут быть окрашены окончательно в один цвет. Такое же рассуждение остается справедливым, когда ребро e окрашено в цвет γ. Если же ребро e было окрашено в цвет α, то e лежит как $(\alpha - \beta)$-цикле, так и в $(\alpha - \gamma)$-цикле, и приведенное выше рассуждение показывает, что обе предварительные раскраски областей R_1 и R_2 различны, и мы снова получаем, что эти области окрашены окончательно также в разные цвета.

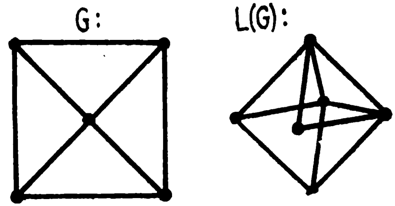


Рис. 14

По данному графу G можно построить так называемый *реберный граф* $L(G)$ (см. рис. 14). Реберный граф $L(G)$ — это граф, вершины которого соответствуют ребрам графа G, и такой, что в нем две вершины смежны, если смежны соответствующие ребра в графе G.

Обратим внимание на следующие два результата, касающиеся реберных графов. Для планарного графа G имеется реберный планарный граф $L(G)$ тогда и только тогда, когда степень любой вершины в графе G не превосходит 4, и если вершина имеет степень 4, то ее удаление обязательно приводит к несвязному графу.

Если граф G не является планарным, то и его реберный граф $L(G)$ также не планарный.

Легко получить эквивалентную гипотезе 3 формулировку.

Гипотеза 5. *Вершины реберного графа кубической планарной карты, не содержащей мостов, можно окрасить в три цвета.*

Гамильтоновы циклы

Предположим, что в графе содержится элементарный цикл, который проходит через каждую вершину графа в точности один раз. Такой цикл (и соответственно граф) будем называть *гамильтоновым.*

Очевидно, что если M — кубическая карта и ее опорный граф U (M) содержит гамильтонов цикл C, то ребра карты M могут быть окрашены по Тейту в три цвета (напомним, что в кубическом графе U (M) должно быть четное число n вершин, потому что $3n = 2m$, где m — число ребер. Таким образом, ребра гамильтонова цикла C, который имеет четную длину, окрашиваются по очереди в два цвета, и третий цвет используется для остающихся ребер). Из этого следует, что области карты могут быть раскрашены в четыре цвета.

Гипотеза 6. *Каждый гамильтонов планарный граф может быть раскрашен в четыре цвета.*

Эквивалентность гипотезы 1 гипотезе 6 установил Уитни. Конечно, если каждый планарный граф может быть раскрашен в четыре цвета, то этим свойством, в частности, обладает и планарный гамильтонов граф. Доказательство обратного утверждения не очевидно. Оно зависит от результатов Уитни, показавшего, что всякий *максимальный планарный граф* имеет гамильтонов цикл. Термин «максимальный планарный граф» означает такой планарный граф, в котором нет ни петель, ни параллельных ребер и к которому нельзя добавить новых ребер без того, чтобы не нарушить хотя бы одно из этих трех условий.

Гипотеза 7. *Можно раскрасить в четыре цвета вершины планарного графа, состоящего из правильного n-угольника с непересекающимися диагоналями, разбивающими внутреннюю область многоугольника на треугольники, и с непересекающимися ребрами (дугами), разбивающими внешнюю область многоугольника также на треугольники.*

Уитни доказал эквивалентность гипотезы 7 и гипотезы четырех красок. Гипотеза 7, по существу, совпадает с гипотезой 6, так как гамильтонов цикл можно представить в виде правильного многоугольника.

Гипотеза 8. *Во всякой кубической карте, не содержащей мостов, можно обойти все вершины посредством либо одного гамильтонова цикла, либо нескольких, попарно не пересекающихся элементарных циклов четной длины.*

Эквивалентность этой гипотезы гипотезе 3 может быть легко установлена. Мы приведем здесь набросок доказательства. Допустим, что ребра кубической карты, не содержащей мостов, уже окрашены по Тейту в три цвета. Выйдем из некоторой вершины и проследуем по цепочке, ребра которой окрашены попеременно в два цвета. Такая цепочка рано или поздно должна вернуться в исходную точку, образовав элементарный цикл. Причина в том, что так как степень каждой вершины равна 3, и три ребра, сходящиеся в любой вершине, окрашены во все три цвета, то возвращение в некоторую промежуточную вершину означало бы, что ребра этого цикла окрашены в три цвета, что противоречит допущению.

В силу связности графа такой обход должен закончиться в исходной вершине, и элементарный цикл обязан иметь четную длину. Если в этот цикл включены все вершины, то это — гамильтонов цикл четной длины. Если же какие-то вершины не входят в данный цикл, то для них повторяем тот же процесс обхода и получаем другой элементарный цикл (подцикл четной длины), не пересекающийся с первым, и т. д.

Обратно, если в графе имеются непересекающиеся между собой циклы четной длины, то мы окрашиваем их ребра поочередно в два цвета, а третий оставляем для ребер, не входящих ни в один цикл. Мы таким образом раскрашиваем ребра по Тейту в три цвета.

Граф называется p-связным, если каждая пара вершин v и w связана по крайней мере p цепями, которые не имеют попарно общих вершин, за исключением v и w.

Доказано, что граф является p-связным тогда и только тогда, когда он после выкидывания из него $p - 1$ или меньшего числа вершин не становится несвязным или тривиальным, то есть состоящим только из одной вершины.

Для некоторых специальных типов графов установлено, что они гамильтоновы; например, полные графы с числом вершин не меньше 3. В качестве другого примера можно привести 4-связный граф. Такой граф также обладает гамильтоновым циклом. Уитни показал, что если M — кубическая карта, то ее дуальный граф $D(M)$ содержит гамильтонов цикл.

Тот факт, что не каждый планарный граф является гамильтоновым, проиллюстрирован на рис. 15, где изображен граф с 20 вершинами и 12 пятиугольными ячейками. Нетрудно показать, что этот граф можно раскрасить в четыре цвета.

Если каждая вершина в графе, содержащем n вершин, имеет достаточно большую степень, по крайней мере $n/2$, то такой граф также обладает гамильтоновым циклом. Более того, было доказано, что если в графе число вершин с небольшой степенью невелико, то граф гамильтонов. Если быть точным, то граф с n ($\geqslant 3$) вершинами гамильтонов, если для каждого натурального i с условием $1 \leqslant i < n/2$ число вершин, степень которых не превышает i, меньше, чем i.

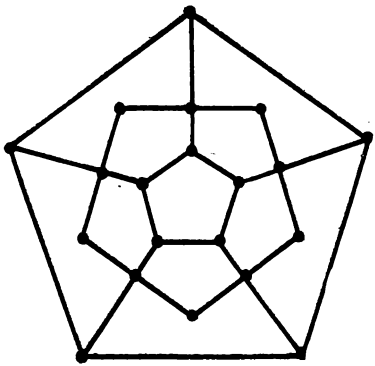


Рис. 15

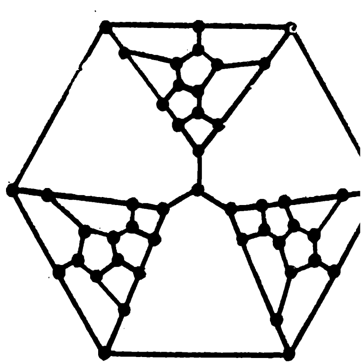


Рис. 16

Однажды Тейт высказал предположение, что каждый 3-связный планарный граф гамильтонов. Но это не так: на рис. 16 приведен пример Татта с 46 вершинами, опровергающий это предположение. Если бы гипотеза Тейта была справедлива, то из этого вытекала бы справедливость гипотезы четырех красок. Как мы увидим в последней главе, для того чтобы доказать гипотезу четырех красок, достаточно показать, что любая кубическая карта M, опорный граф U (M) которой является 3-связным, может быть окрашена в четыре цвета. Но из гипотезы Тейта следовало бы, что каждая такая карта обладала бы гамильтоновым циклом и, следовательно, могла бы быть окрашена в четыре цвета. Сам Тейт, однако, не привел аналогичного доказательства того, как гипотеза четырех красок следовала бы из справедливости его гипотезы.

Ориентированные графы

Граф называется *направленным* или *ориентированным*, если каждому ребру приписано направление (обозначаемое стрелкой) от одной из его конечных вершин к другой.

Рассмотрим в ориентированном графе элементарный цикл. Подсчитаем количество m_1 ребер в цикле, направленных по часовой стрелке, и количество m_2 ребер, направленных против часовой стрелки. Отношение большего из этих чисел к меньшему называется *отношением потока* данного цикла.

Гипотеза 9. *Ребра каждого планарного графа могут быть ориентированы так, что отношение потока каждого цикла не больше трех.*

Доказательство эквивалентности гипотез 1 и 9 принадлежит Минти. В действительности Минти установил эквивалентность раскрашиваемости графа в k цветов тому факту, что отношение потока каждого цикла не превосходит $k-1$.

Гипотеза 9 имеет другую эквивалентную форму. Обозначим через m (C) число ребер в цикле C.

Гипотеза 10. *Ребра планарного графа можно ориентировать так, что для любого цикла C и любого направления, выбранного на этом цикле (по часовой или против часовой стрелки), число ребер m_1 (C) цикла C, ориентированных противоположно выбранному на цикле C направлению, удовлетворяет неравенству* $m_1(C) \geqslant {}^1/_4 m$ (C).

Разбиение множества вершин; хроматическое число

Граф называется *k-дольным*, если множество его вершин можно разделить на такие k непересекающиеся классы, что никакие две вершины из одного класса не соединены ребром.

Заметим, что граф является двудольным в том и только в том случае, когда его элементарный цикл имеет четную длину.

Отметим, что определение k-дольного графа — это просто иначе высказанное условие раскраски графа в k цветов. В самом деле, когда вершины планарного графа окрашены, скажем, в четыре цвета, то они разбиваются на четыре непересекающихся множества, такие, что все вершины каждого множества окрашены в один цвет, и никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром. Другими словами, граф может быть окрашен в четыре цвета тогда и только тогда, когда граф 4-дольный. Каждая пара из этих четырех множеств вместе с соединяющими их ребрами образует двудольный граф.

Гипотеза 11. *Вершины дуального графа любой планарной карты, не содержащей мостов, можно разбить на два непересекающихся множества, такие, что каждое множество определяет двудольный граф.*

Эта гипотеза эквивалентна гипотезе 1.

Заметим, что k-дольный граф допускает, по определению, разбиение множества всех своих вершин на k-непересекающихся классов с указанными выше свойствами. Вполне естественно, что таких разбиений может быть не одно, и количество классов может оказаться разным в разных разбиениях. В связи с этим определим *хроматическое число* графа как минимальное число непересекающихся классов, на которые может быть разбито множество вершин графа так, что никакие две вершины из одного класса не соединяются ребром. Иначе говоря, хроматическое число графа — это минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа. Поэтому гипотезу четырех красок можно переформулировать.

Гипотеза 12. *Хроматическое число дуального графа планарной карты не превышает четырех.*

Ершов и Козухин показали, что хроматическое число $\chi(G)$ связного графа G с n вершинами и m ребрами удовлетворяет следующим ограничениям:

$$-\left[-\frac{n}{[(n^2-2m)/n]}\times\left(1-\frac{\{(n^2-2m)/n\}}{1+[(n^2-2m)/n]}\right)\right]$$
$$\leqslant\chi(G)\leqslant\left[\frac{3+\sqrt{9+8(m-n)}}{2}\right].$$

Здесь введены обычные в математике обозначения: $[x]$ означает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\}$ — дробную часть числа x, т. е. разность $x-[x]$.

Пусть вершины графа G занумерованы ($i=1, 2, \ldots, n$) в порядке возрастания их степеней d_i. Если k есть последний номер вершины, для которой $k\leqslant d_k+1$, то $\chi(G)\leqslant k$.

Это следует из того, что самое большее, чему может быть равно хроматическое число, — это наивысшая среди всех вершин степень плюс единица. Уэлш и Пауэлл построили алгоритм раскрашивания вершин графа в число цветов, равное границе k.

Граф G называется *критическим* (*вершинно-критическим*), если удаление из него любой вершины v и инцидентных с ней ребер понижает хроматическое число: $\chi\ (G—v) \leqslant \leqslant \chi\ (G)$. При этом граф G — *k-критический*, если $\chi\ (G) = k$. Тогда для каждой вершины v, $\chi\ (G — v) = k—1$.

Дирак показал, что если граф G — k-критический при условии $k \geqslant 3$, то либо G содержит гамильтонов цикл, либо его *окружение*, т. е. длина самого длинного элементарного цикла, равно $2k — 2$. Он также показал, что каждый k-хроматический граф содержит критический k-хроматический подграф.

Разбиение множества ребер; факторизация

Говорят, что граф *k-факторизуем*, если множество его ребер может быть разбито на непересекающиеся классы таким способом, что любая вершина является концевой точкой для k ребер из каждого класса.

Вернемся к гипотезе 3, касающейся раскраски ребер по Тейту кубической карты M, не содержащей мостов, в три цвета. Разбиение множества ребер на три класса одноцветных ребер, очевидно, в данном случае является 1-факторизацией опорного графа карты M. Поэтому гипотезу 3 можно переформулировать так:

Гипотеза 13. *Каждый кубический планарный граф, не содержащий мостов, — 1-факторизуем.*

Гипотеза Хадвигера

Интуитивно понятный смысл *стягивания* ребра в графе G, если быть точным, заключается в удалении из графа двух связанных ребром вершин u и v и добавлении новой вершины w, связанной со всеми теми вершинами, с которыми были смежны u или v. Говорят, что граф G *стягивается* в граф H, если граф H можно получить из G посредством нескольких последовательных стягиваний ребер.

Хадвигер высказал предположение о том, что каждый связный k-хроматический граф стягивается в полный граф с k вершинами.

Справедливость этой гипотезы для $k=5$ равносильна истинности гипотезы четырех красок. Действительно, для

$k=5$ гипотеза Хадвигера утверждает, что граф стягивается в полный граф на пяти вершинах. Но такой граф, как мы знаем, непланарен, а следовательно, и исходный граф также непланарен, потому что при стягивании ребер свойство планарности сохраняется. Отметим, что предположение Хадвигера уже доказано для $k<5$.

Понятие стягиваемости может оказаться полезным при формулировании признака планарности графа. Пусть через K_5 обозначен полный граф с пятью вершинами и $K_{3,3}$ — полный двудольный граф из двух множеств, каждое из которых имеет три вершины. *Необходимый и достаточный признак планарности графа* (Понтрягина — Куратовского) *состоит тогда в том, что никакой его подграф не стягивается ни в* K_5, *ни в* $K_{3,3}$.

Хроматические многочлены

Обозначим через $P_r(\lambda)$ число способов раскраски карты с r областями не более чем λ красками. Тогда $P_r(\lambda)$ называется *хроматическим многочленом* карты. Понятно, что хроматический многочлен может соответствовать многим картам с r областями. И для того чтобы придать $P_r(\lambda)$ более точное значение, важна классификация карт с r областями, (число способов окрасить две карты с r областями может быть различным).

Хроматический многочлен карты M будем обозначать $P(M, \lambda)$. Можно объяснить, почему здесь введен термин «многочлен». В самом деле, подсчитаем число способов раскрашиваний в λ цветов, например карты M_3, состоящей из трех областей, попарно смежных между собой. Любую взятую область можно окрасить λ способами, тогда другую область можно окрасить в $(\lambda-1)$ цвет, а третью — в $(\lambda-2)$ цвета. Поэтому

$$P(M_3, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

В более общем случае, если M_r — карта с r областями, попарно смежными между собой, т. е. ее дуальный граф $D(M)$ на r вершинах полный, то очевидно, что

$$P(M_r, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-r+1).$$

Итак, для карт M_r, дуальный граф которых полный, $P(M_r, \lambda)$ является многочленом от λ. Для произвольной карты M число $P(M, \lambda)$ можно представить в виде суммы чисел вида $P(M_r, \lambda)$. Это оправдывает введение термина «хроматический многочлен».

Очевидно, что гипотеза четырех красок эквивалентна утверждению, что для любой карты M $P(M, 4) > 0$. Рассмотрение хроматического многочлена — это вычислительный метод в исследовании проблемы четырех красок.

Сейчас мы приведем некоторые интересные результаты, принадлежащие Татту, о поведении хроматических многочленов.

Пусть M — треугольная карта с k вершинами. Тогда хроматический многочлен $P(M, \lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$|P(M, 1+\tau)| \leqslant \tau^{5-k},$$

где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$ так называемое «золотое отношение», являющееся одним из корней квадратного уравнения $x^2 = x + 1$.

Татт представляет этот результат как теоретическое обоснование эмпирического наблюдения, что $P(M, \lambda)$ как будто имеет корень, близкий к $\lambda = 1+\tau$. Для любой треугольной карты M (без петель) Татт показывает, что $P(M, \tau+2) > 0$. Так как $\tau + 2 = 3{,}618\ldots$, то этот результат сообщает кое-что о поведении многочлена $P(M, \lambda)$ вблизи $\lambda = 4$. Кроме того, известно, что многочлен $P(M, \lambda)$ не на всем интервале $\tau + 2 < \lambda < 4$ положительный.

Если карта состоит из треугольников, за исключением одной области с m сторонами $(2 \leqslant m \leqslant 5)$, то

$$|P(M, 1+\tau)| \leqslant \tau^3 + m - k.$$

Недавно показано, что если M — треугольная карта с n вершинами, то $P(M, \tau+2) = (\tau+2)\,\tau^{3n-10} P^2(M, \tau+1)$.

Глава 3. ПРИВОДИМОСТЬ

Неприводимые графы и карты

Напомним, что планарная карта (граф) называется *неприводимой*, если она (он) 5-хроматическая, и любая другая карта (граф) с меньшим числом областей (вершин) имеет хроматическое число, меньшее пяти. Таким образом, неприводимая планарная карта (граф) является минимальной 5-хроматической.

Предположим, что неприводимая карта или граф существуют. В дальнейшем мы сумеем показать, что любая такая карта должна обладать некоторыми (назовем их *принудительными*) свойствами. Например, неприводимая карта обязана состоять только из *односвязных* областей. (не претендуя на строгость, можно сказать, что *односвязной* называют такую область, в которой любую замкнутую линию можно «стянуть» по этой же области в точку. Если хоть для одной замкнутой линии этого сделать нельзя, то область неодносвязна. Стандартным примером односвязной области является круг, примером неодносвязной — кольцо (рис. 17). С другой стороны, покажем, что можно, не уменьшая общности, предполагать неприводимую карту, обладающую определенными *необязательными* свойствами; в том смысле, что если неприводимая карта существует, то можно построить другую неприводимую карту, уже обладающую определенными необязательными свойствами. Например, если неприводимая карта существует, то по ней можно построить неприводимую кубическую карту.

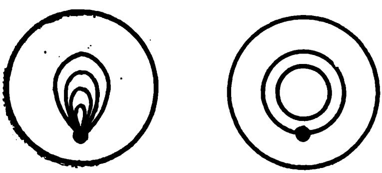


Рис. 17

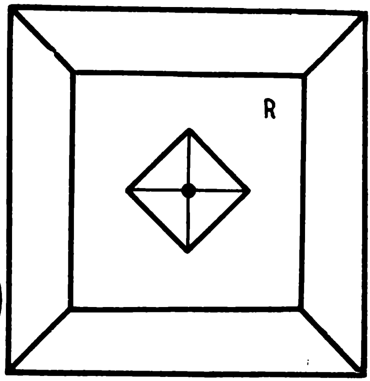


Рис. 18

Очевидно, что если гипотеза четырех красок неверна, то существуют 5-хроматические карты и, следовательно, существуют 5-хроматические карты с минимальным числом областей. Обратно, если существует неприводимая карта, то она является 5-хроматической планарной картой, и гипотеза четырех красок неверна, т. е. гипотеза четырех красок равносильна утверждению, что не существует неприводимых карт.

У нас имеются две основные причины изучения неприводимых карт. Прежде всего для того, чтобы показать, что любая карта может быть раскрашена в четыре цвета, достаточно установить, что неприводимая карта является таковой. Следовательно, мы можем считать, что та карта, которую мы пытаемся раскрасить в четыре цвета, обладает как принудительными, так и необязательными свойствами неприводимых карт. Во-вторых, мы изучаем неприводимые карты в надежде увеличить так называемое *число Биркгофа*, равное минимальному числу областей неприводимой карты. Число Биркгофа N полагают равным ∞, если неприводимых карт не существует. Любая карта с числом областей, меньшим N, раскрашивается в четыре цвета.

Относительно числа Биркгофа известно очень мало. За 50 лет, начиная с 1922 года, когда Франклин показал, что $N \geqslant 26$, оценка для N повышалась благодаря усилиям многих исследователей. Последний на сегодняшний день шаг в этом направлении сделал Г. А. Донец, доказавший в 1971 году, что $N \geqslant 42$.

Неприводимость является очень сильным требованием, и мы сумеем вывести многие свойства неприводимых графов. Так как петли и параллельные ребра не влияют на окрашиваемость графа, то мы всегда можем предположить, что неприводимый граф — простой. Итак, пусть G — неприводимый простой граф. Тогда можно уложить граф G в максимальный планарный граф G с тем же числом вершин. Граф G — также 5-хроматический и, следовательно, неприводимый. Таким образом, если существует какой-то планарный неприводимый граф, то существует также неприводимый простой максимальный планарный граф. Один результат Уитни, о котором мы уже упоминали, гарантирует существование гамильтонова цикла в любом простом максимальном планарном графе, но любая карта с гамильтоновым циклом может быть раскрашена в четыре цвета. Другими словами, исходя из произвольного неприводимого графа, мы получили другой неприводимый граф, карта которого может быть раскрашена в четыре цвета. Такое свойство является необязательным (в указанном выше смысле) для неприводимого графа.

Из этого, конечно, не следует, что мы можем раскрасить вершины этого графа, используя только четыре цвета. Отметим, что любая карта M, для которой опорный граф $U(M)$ — максимальный, очевидно, является треугольной. Верно и обратное, для любой треугольной планарной карты M граф $U(M)$ — максимальный. Отметим, что любую треугольную карту, за исключением поверхности тетраэдра, можно раскрасить в три цвета.

Рассматривая карты и привлекая двойственные соображения (дуальность), можно показать, что вышеупомянутые необязательные условия для неприводимых графов порождают следующие также необязательные условия для неприводимых карт:

а) отсутствие мостов;

б) две области граничат не более чем по одной стороне;

в) кубичность.

С другой стороны, некоторые характеристики являются принудительными для неприводимых карт. Любая карта делит плоскость на открытые связные компоненты. Области этой карты есть в точности замыкания этих компонент.

Теорема. *Пусть M — неприводимая карта. Тогда любая (за исключением внешней) область в M является односвязной.*

Доказательство. Допустим, что область R не является односвязной (рис. 18). Тогда область R разбивает плоскость на внутреннюю и внешнюю части. Область R вместе с областями, внутренними по отношению к ней, образует карту M_1, а область R вместе с внешними областями — другую карту M_2. Так как и M_1 и M_2 содержат меньше областей, чем карта M, то в силу неприводимости M можно раскрасить в четыре цвета как карту M_1, так и карту M_2. Переставляя цвета в раскраске карты M_1, мы можем обеспечить окраску области R в тот же цвет, что и в карте M_2. Это позволяет объединить обе раскраски в общую раскраску карты M в четыре цвета.

В переводе на язык дуальных графов эта теорема эквивалентна тому, что неприводимый планарный граф не имеет *точек сочленения*, т. е. таких вершин, удаление которых увеличивает число связных компонент графа. В рассматриваемом случае неодносвязной и только неодносвязной области карты M соответствовала бы в дуальном графе точка сочленения. С другой стороны, отсутствие в графе точек сочленения говорит о том, что граф по крайней мере бисвязен. В действительности же всякий максимальный планарный неприводимый граф G должен быть трехсвязным. В самом деле, если мы расположим граф G на сфере, то получим триангуляцию сферы (т. е. разбиение сферы на треугольники) так, что по теореме Штейница G — трехсвязный (теорема Штейница утверждает, что вершины и ребра трехмерного выпуклого многогранника образуют планарный трехсвязный граф, и обратно).

Сейчас мы сможем, используя дуальность, доказать следующую теорему:

Пусть M — неприводимая карта, удовлетворяющая необязательным условиям а), б), в). Тогда ее опорный граф $U(M)$ трехсвязен.

Доказательство. Представим себе карту M как карту на сфере. Тогда дуальный граф $D(M)$ разбивает сферу на треугольники (триангуляция сферы). В свою очередь, вершины и ребра дуального к любой триангуляции сферы графа можно реализовать как вершины и ребра выпуклого многогранника. Следовательно, можно считать, что карта M — это поверхность выпуклого многогранника, и поэтому в силу теоремы Штейница ее опорный граф трехсвязен.

Таким образом, трехсвязность опорного графа является необязательным свойством неприводимой карты. Этот результат кажется особенно интересным, если иметь в виду теорему Уитни, которая утверждает, что трехсвязный граф можно разместить на плоскости единственным образом. Иначе говоря, в этом случае карта M полностью определяется своим опорным графом $U(M)$.

Критические графы и неприводимость

Граф G есть *реберно-критический*, если стягивание любого его ребра понижает хроматическое число графа.

Очевидно, любой неприводимый граф G является как вершинно-критическим, так и реберно-критическим, поскольку и удаление вершины, и стягивание ребра уменьшают общее количество вершин, т. е. и та и другая операции понижают хроматическое число. Поэтому мы можем исследовать свойства вершинно-критических или реберно-критических графов с целью добыть информацию о неприводимых графах.

Граф G называется *k-реберно-связным*, если выкидывание из него меньшего, чем k числа ребер не приводит к несвязному графу.

Оре доказал следующую теорему.

Теорема. *Любой 5-хроматический вершинно-критический граф является 4-реберно-связным.*

Аналогичная теорема о реберно-критических графах получена Дираком.

Теорема. *Пусть G — реберно-критический граф, и его хроматическое число $\chi(G) \geqslant 5$. Тогда граф G 5-связен.*

Таким образом, каждый неприводимый планарный граф 5-связен.

Мы можем при помощи последнего результата заново вывести теорему (из предыдущего параграфа) о том, что необязательным свойством неприводимого графа является раскрашиваемость его карты в четыре цвета. Для этого допустим, что G — неприводимый планарный граф и, следовательно, 5-связен. Ранее уже упоминалось о том, что всякий 4-связный планарный граф — гамильтонов. Значит, рассматриваемый граф G подавно гамильтонов, а следовательно, его карта раскрашивается в четыре цвета.

Отметим теперь одну теорему Биркгофа о свойстве неприводимых карт. Последовательность $R_1, R_2, \ldots, R_p$ областей карты при условии, что R_1 смежна с R_2, R_2 с R_3, ... R_{p-1} с R_p, R_p с R_1 и никакие другие пары областей R_i и R_j между собой не смежны, составляет *кольцо*.

Так вот, теорема Биркгофа утверждает, что *если карта M неприводима, то M не может содержать кольца из 5 областей, если только оно не окружает пятиугольник.*

Приводимые конфигурации

Последняя теорема подсказывает следующее определение.

Пусть G — граф. Тогда будем называть G *приводимой конфигурацией*, если граф G не может быть подграфом неприводимого графа. Приводимые конфигурации на картах определяются дуально.

Таким образом, только что упоминавшийся результат Биркгофа утверждает, что кольцо из пяти областей, не окружающее пятиугольник, — приводимая конфигурация.

Мы имели уже и другие типы приводимых конфигураций; например, такой является любая область не более чем с четырьмя сторонами. Это позволяет нам получить нижнюю границу для числа Биркгофа.

Если M — кубическая карта и r_i обозначает число областей в карте, ограниченных i сторонами, то $3n=2m$ и $2m=\sum\limits_i ir_i$. Сопоставление этих уровней с формулой Эйлера $n-m+r=2$ приводит к соотношению $\sum\limits_i (6-i)\, r_i = 12$. Если карта неприводима, то $r_i = 0$ для $i < 5$, и, следовательно, единственный положительный член в этой сумме — это $(6-5)r_5 = r_5$ — число пятиугольников. Отсюда мы тут же получаем, что неприводимая кубическая карта должна содержать по крайней мере 12 пятиугольников.

Если карта состоит в точности из 12 пятиугольников, то это — додекаэдр, который может быть раскрашен в четыре цвета. Значит, в неприводимой карте должно содержаться по крайней мере 13 областей. Иначе говоря, доказано, что число Биркгофа не меньше 13.

Чтобы улучшить эту нижнюю оценку для числа Биркгофа, необходимо добыть более крупные приводимые конфигурации. И даже тогда увеличение нижней границы может быть сопряжено с большими трудностями, потому что каждый раз приходится рассматривать много комбинаторных возможностей.

Для перечисления других приводимых конфигураций нам понадобится особый жаргон. Эти конфигурации будут изложены в терминах вершин, но, конечно, могут быть дуально перенесены на области.

Назовем вершину v степени k *k-вершиной*. Любая вершина v степени 6 или меньше — *минорная*, вершина степени 7 или выше — *мажорная. Соседка* — это вершина, смежная с вершиной v. Если соседка — k-вершина, то назовем ее *k-соседкой*. Три вершины составляют *триаду*, если они образуют три угла треугольника. Две соседки с вершиной v_0 *последовательны*, если они вместе с v_0 составляют триаду. Соседки с вершиной v_0 — v_1, v_2, ..., v_r называются *последовательными*, если v_{i-1} и v_i ($i=1, 2, \ldots, r$) последовательны в только что указанном смысле.

Вот одна из хронологически первых теорем о приводимых конфигурациях.

Теорема 1. *5-вершина приводима, когда у нее есть три последовательные 5-соседки.*

Имеется аналогичная теорема для 6-вершин.

Теорема 2. *6-вершина приводима, если у нее есть три последовательные 5-соседки.*

Из этих результатов вытекает

Следствие. *5-вершина v_0 приводима, если она имеет трех 5-соседок и одну 6-соседку.*

Доказательство. Если предположить, что вершина v_0 неприводима, то по теореме 1 она должна иметь трех последовательных соседок v_1, v_2, v_3, причем v_2 является 6-вершиной, а v_1 и v_3 — 5-вершинами. Но тогда 6-вершина v_2 имеет трех последовательных 5-соседок и, значит, по теореме 2 приводима.

Теорема 3. *5-вершина с двумя 5-соседками и тремя 6-соседками приводима.*

Вот еще несколько теорем о приводимых 5-вершинах.

Теорема 4. *5-вершина приводима, если у нее одна 5-соседка и четыре 6-соседки.*

Теорема 5. *5-вершина приводима, если все ее соседки суть 6-вершины.*

Сопоставляя предыдущие теоремы, получаем следующее

Следствие. *5-вершина приводима, когда все ее соседки минорны.*

Таким образом, в неприводимом графе каждая 5-вершина имеет мажорную соседку.

Теорема 6. *6-вершина приводима, если все ее соседки минорны.*

Были получены некоторые общие результаты о числе последовательных 5-соседок для n-вершины в неприводимом графе.

Теорема 7. *n-вершина в неприводимом графе не может иметь больше $n-3$ последовательных 5-соседок при четном n, и больше $n-2$ таких соседок при нечетном n.*

Для $n=7$ этот результат можно улучшить.

Теорема 8. *7-вершина более чем с четырьмя последовательными 5-соседками приводима.*

Таким образом, 7-вершина не менее чем с шестью 5-соседками приводима, т. е. в неприводимом графе у любой 7-вершины имеется не больше пяти 5-соседок.

Некоторые новые приводимые конфигурации были обнаружены Оре и Стемплом. Например, имеется такой результат.

Теорема 9. *Пусть v_0 — 5-вершина с соседками v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Если соответствующий список их степеней* есть (6, 5, 5, 6, 7) *и, кроме того, v_1 и v_5 составляют триаду с 5-вершиной $w \neq v_0$, то конфигурация приводима.*

Мы не пытались здесь привести полный или хотя бы приблизительно полный список приводимых конфигураций, но предпочли передать дух тех манипуляций, с помощью которых они добываются.

Глава 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Некоторые достаточные условия

Любое из следующих ниже условий, наложенных на карту, является достаточным для того, чтобы быть уверенным, что такая планарная карта раскрашивается в четыре цвета:

а) некоторая область ограничена не более чем четырьмя сторонами;

б) каждая область ограничена не более чем пятью сторонами;

в) имеется не более 21 вершины степени 3;

г) совокупность стран, у которых более четырех соседей, можно разделить на два класса так, что один класс содержит не более одной страны и никакие две страны другого класса не являются соседями;

д) карта — кубическая, не содержит мостов, и число сторон каждой области кратно трем.

Однако очень мало предложено конструкций, способов, указывающих, как надо раскрашивать некоторые достаточно общие классы карт. Следующая схема продемонстрирует нам, каким образом можно раскрасить в три цвета ребра карты из одного такого класса.

Пусть M — кубическая карта, не имеющая мостов. Предположим также, что число ребер на границе каждой области кратно трем, т. е. карта M удовлетворяет условию д). Рингель предложил конструктивную схему окрашивания ребер карты М в три цвета.

Перенумеруем цвета 1, 2 и 3, которые циклически упорядочим: за 1 следует 2, за 2 — 3, за 3 — 1. Если e, f и g — три ребра карты M, сходящиеся в одной вершине, то упорядочим их по направлению часовой стрелки, условившись, что, двигаясь от ребра e по часовой стрелке, мы встретим сначала f и потом g.

Схема раскрашивания. Начнем с некоторого ребра e карты M и окрасим его в произвольный цвет, скажем, 1. Рассмотрим теперь четыре ребра, смежные с e, по два в каждом конце ребра e. Так как в обоих концах ребра e ребра упорядочены по часовой стрелке, то каждое из четырех ребер либо предшествует e, либо следует за ним. Припишем каждому из них соответствующий цвет. Таким образом, ребро f, следующее за e, окрашивается в цвет 2. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не будут окрашены все ребра.

Эта процедура не двусмысленна, другими словами, каждое ребро окрашивается только в один цвет. Следовательно, никакие два смежных ребра не окрашиваются в одинаковый цвет.

Этим обеспечивается конструктивное доказательство достаточности условия д) для раскрашиваемости карты в четыре цвета, потому что, как мы уже видели, если задана трехцветная раскраска ребер кубической карты, не содержащей мостов, то существует способ раскрасить области этой карты в четыре цвета.

Раскраска карт на поверхностях, отличающихся от плоскости и сферы

На фоне того, что проблема четырех красок до сих пор не решена, может показаться неожиданным, что аналогичные задачи для других ориентируемых поверхностей решены полностью.

Говорят, что поверхность S_p имеет *род* p, если она гомеоморфна сфере с p ручками.

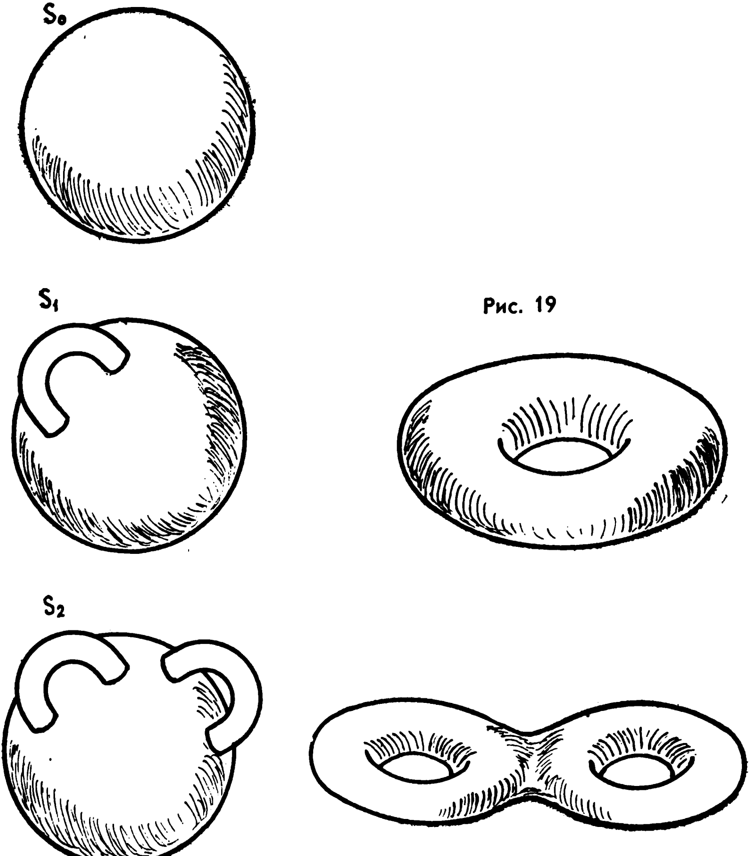


Рис. 19

Мы не будем здесь останавливаться на элементарных фактах топологии. Читателю, которому они не известны, скажем только, что речь здесь идет о поверхностях, изображенных на рис. 19.

Сформулируем знаменитую теорему Хивуда о раскраске карт на таких поверхностях.

Любая карта, расположенная на (ориентируемой) поверхности S_p рода p ($p=1$, 2...), может быть раскрашена в число цветов, не превосходящее χ_p, где

$$\chi_p = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right].$$

Здесь, как и раньше, квадратные скобки означают целую часть числа, заключенного в них.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Харари. Заметим, что $\chi_p=4$, т. е. справедливость этой теоремы при $p=0$ была бы равнозначна справедливости гипотезы четырех красок. Но, к сожалению, единственное известное доказательство теоремы существенно зависит от предположения $p>0$.

Хивуд, обнаруживший ошибку в доказательстве Кемпе, сам оказался в какой-то мере в роли Кемпе. А именно он считал, что ему удалось доказать, что число χ для $p\geqslant 1$ достигается хоть для одной карты на поверхности рода S_p, т. е. на поверхности S_p имеется карта, хроматическое число которой равно χ_p. Через год Хеффтер указал неточности в рассуждениях Хивуда и, помимо этого, доказал точность числа χ_p для $1\leqslant p\leqslant 6$.

В самое последнее время Рингелю и Янгсу удалось доказать для любого целого положительного p, что на поверхности рода p имеется карта, хроматическое число которой в точности равно χ_p.

Достаточность шести цветов

Теорема. *Любая планарная карта может быть раскрашена в шесть цветов.*

Доказательство легко проводится индуктивно по числу областей. Если карта состоит не более чем из шести областей, то она, конечно, раскрашивается в шесть цветов Предположим уже доказанным, что любая карта, состоящая из r областей, раскрашивается шестью цветами. Докажем теперь, что любая карта с $r+1$ областями обладает этим же свойством. Рассмотрим карту с $r+1$ областями. Как мы уже видели, вследствие формулы Эйлера хотя бы одна из областей имеет не более пяти сторон. Тогда, разделив эту область на части (рис. 20) и присоединив их к соседним областям, получим новую карту с r областями.

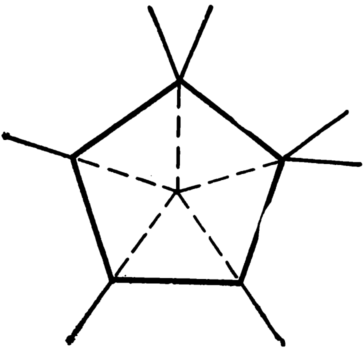


Рис. 20

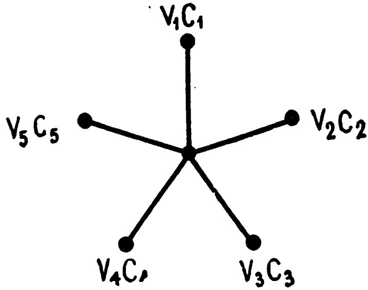


Рис. 21

Эту карту можно по предположению индукции раскрасить в шесть цветов. Возвращаясь к исходной карте с $r+1$ областями и учитывая, что выделенная область имеет не более пяти соседей, получаем, что для этой области имеется «свободная» краска из числа шести.

Достаточность пяти цветов

Теорема Хивуда. *Любая планарная карта может быть раскрашена в пять цветов.*

Доказательство будет проведено в терминах дуальных планарных графов индукцией по числу вершин r. Если $r \leqslant 5$, то теорема очевидна. Предположение индукции заключается в том, что каждый планарный граф с r вершинами можно раскрасить в пять цветов. Пусть G — планарный граф с $r+1$ вершинами. В графе G имеется вершина v степени 5 или меньше. Граф $G - v$, получающийся из G удалением вершины v и инцидентных с ней ребер по предположению индукции можно раскрасить в пять цветов.

Рассмотрим такую раскраску графа $G - v$. Цвета будем обозначать через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. Понятно, что если в раскраске вершин, смежных с v, хотя бы один цвет не используется, то его можно использовать для окрашивания вершины v. Поэтому если, в частности, степень вершины v меньше пяти, то граф G раскрашивается в пять цветов.

Пусть степень вершины v равна пяти, и для вершин графа G, смежных с v, при пятицветной раскраске графа $G - v$ использованы все пять цветов. Пусть смежные вершины v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, окрашенные соответственно в цвета c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, циклически упорядочены (рис. 21) (это всегда можно сделать, занумеровав подходящим образом смежные вершины и перенумеровав, если нужно, цвета). Обозначим через G_{13} подграф графа $G - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в один из цветов c_1 и c_3. Этот граф может быть несвязным. Если вершины v_1 и v_3 принадлежат при этом разным компонентам, то граф $G - v$ можно перекрасить в те же пять цветов, поменяв для этого в компоненте графа G_{13}, содержащей v_1, друг с другом цвета вершин c_1 и c_3 (c_1 на c_3 и c_3 на c_1). И тогда для окраски вершины v высвобождается цвет c_1.

Рассмотрим теперь случай, когда вершины v_1 и v_3 принадлежат одной компоненте G_{13}. Тогда в графе $G - v$ имеется элементарная цепь, соединяющая v_1 с v_3, все вершины которой попеременно окрашены в c_1 и c_3. Эта цепь вместе с цепью v_3vv_1 образует в графе G элементарный цикл, который окружает либо вершину v_2, либо две вершины v_4 и v_5. В любом из этих случаев вершины v_2 и v_4 нельзя соединить цепью в графе $G - v$, вершины которой были бы окрашены попеременно в цвета c_2 и c_4. Поэтому рассматривая подграф G_{24} графа $G - v$, порожденный всеми вершинами, окрашенными в цвета c_2 и c_4, заключаем, что вершины v_2 и v_4 принадлежат различным его компонентам. Меняя между собой цвета c_2 и c_4 вершин той компоненты подграфа G_{24}, которая содержит вершину v_2, выделяем «освободившийся» цвет c_2 для вершины v. Этим завершается доказательство.

Однозначность раскрашивания

Каждая раскраска графа G в k цветов порождает разбиение множества его вершин на k одноцветных классов. Если любой другой раскраске в k цветов индуцированное разбиение на классы будет тем же, то говорят, что граф G *однозначно раскрашивается в k цветов.*

Заметим, что при любой k-раскраске однозначно раскрашиваемого в k цветов графа каждая вершина v должна быть смежна хотя бы с одной вершиной каждого цвета, отличающегося от цвета вершины v. Иначе, перекрасив только одну вершину v, получили бы другую раскраску. Мы здесь приведем некоторые результаты относительно однозначности раскрашивания графа в k цветов.

Теорема 1. *При k-раскраске однозначно раскрашиваемого графа в k цветов подграф, являющийся объединением любых двух одноцветных классов вершин, связен.*

Теорема 2. *Однозначно k-раскрашиваемый граф — $(k-1)$-связный. Соответствующий подграф из m одноцветных классов $(2 \leqslant m \leqslant k)$ — $(m-1)$-связный.*

Теорема 3. *Для каждого $k \geqslant 3$ существует однозначно k-раскрашиваемый граф, не содержащий в качестве подграфа полный граф на k вершинах.*

Заметим, что здесь речь шла не только о планарных графах. Что касается планарных графов, то поскольку в каждом таком графе обязательно имеется хотя бы одна вершина не более чем с пятью смежными вершинами, планарный граф раскрашивается в k цветов при $k \geqslant 6$ неоднозначно. Более того, не существует планарных графов, однозначно раскрашиваемых в пять цветов. Известно также, что каждый однозначно 4-раскрашиваемый планарный граф является максимальным планарным.

Теорема 4. *Пусть G — 3-хроматический планарный граф. Если в G содержится такой треугольник T, что какую вершину v ни взять, существует последовательность треугольников T, T_1, ..., T_m, в которой соседние два треугольника имеют общее ребро, и вершина v есть вершина последнего треугольника T_m, то граф G раскрашивается в три цвета однозначно.*

Однозначно раскрашиваемый в три цвета планарный граф, имеющий не менее четырех вершин, должен содержать по крайней мере два треугольника.

В общем же случае раскрашивание карты или графа неоднозначно.

Некоторые последние результаты

Вне круга вопросов, рассматриваемых в этой статье, осталась проблема раскраски бесконечных планарных графов, в связи с которой можно было бы упомянуть об исследованиях Эрдеша, Хэжнала, Хэймена.

Нам бы также хотелось обратить внимание читателя на некоторые другие работы последних лет. Можно определить *несвязное раскрашивание* (или *D-раскрашивание*) графа как разбиение множества вершин на подмножества V_1, V_2, ... V_n, такое, что для каждого i часть графа G, порожденная множеством V_i, несвязна. *D-хроматическое* число $\chi_d(G)$, аналогично хроматическому числу, есть наименьшее число подмножеств при любом D-раскрашивании графа G. D-хроматическое число обладает многими свойствами хроматического числа, но кое в чем есть различие. Например, доказана следующая теорема: если G — планарный граф, то $\chi_d(G) \leqslant 4$.

Несколько слов об эвристическом методе раскрашивания графа, разработанном Пеком и Уильямсом. Они рассматривают граф и предлагают выполнить для нахождения тех вершин, которые должны быть окрашены в k-й цвет, следующие операции:

1) найти среди неокрашенных вершину v наивысшей степени;

2) проверить, является ли v смежной с какой-нибудь вершиной, уже окрашенной в k-цвет;

3) если нет, то окрасить v в цвет k;

4) если да, то исключить v из числа вершин, окрашивающих в цвет k, и вернуться к шагу 1).

Этот эвристический метод опирается на рассмотрение вектора d, i-й компонентой которого является степень i-й вершины. Уильямс модифицирует этот процесс, заменяя для этого вектор d на d_m, где вектор d_m определяется последовательно: $d_1=d$, $d_{m+1}=Ad_m$; здесь через A обозначается матрица смежностей графа G. Вектора d_m при $m\to\infty$ сходятся к главному собственному вектору матрицы A. Уильямс замечает, что эта сходимость наступает, вообще говоря, после $m=\sqrt[3]{n}$ итераций, где n — число вершин в графе.

Уильямс применил свой модифицированный метод к раскраске одного графа, содержащего 700 вершин, использовав для этого 28 красок. Заметим, что здесь речь идет не о планарном графе. Позднее было обнаружено, что этот граф содержит полный подграф на 26 вершинах и уже для раскраски такого подграфа нужно 26 цветов. Так что оценка Уильямса, прямо-таки, скажем, не слишком завышена.

Как мы уже отмечали, Рингель и Янгс подтвердили гипотезу Хивуда. По мнению Янгса, их совместная работа может быть использована для получения прямых доказательств того, что различные гипотезы, в частности гипотеза 3, эквивалентны гипотезе четырех красок. Есть надежда, что эти методы (графы тока, вихревые графы, закон Кирхгофа) в конечном счете дадут нам новую информацию в этой области, хотя до сих пор они этого еще не сделали.

Заключение

В заключение, возможно, представляет интерес процитировать крупного современного геометра Коксrepa:

«Если бы я был настолько смелым, чтобы выдвинуть гипотезу, я бы предположил, что существует карта, для раскраски которой необходимо пять цветов, но простейшая такая карта содержит так много областей (возможно, сотни или тысячи), что ни у кого, перед кем стояла бы эта задача, не хватило бы терпения проделать все необходимые проверки, которые потребовались бы для этого, чтобы исключить возможность раскраски этой карты в четыре цвета. Многие, с другой стороны, верят, что может быть гипотеза четырех красок верна; действительно, редакторы журналов нередко имеют несчастье получать рукописи, в которых она «доказывается». Такие рукописи либо очевидно некомпетентны, либо настолько длинны, что обрекают рецензентов на утомительную работу по отысканию в них изъянов. Эта проблема рассматривалась столь многими способными математиками, что любой, кто сможет доказать, что некоторая карта действительно требует для раскраски пяти цветов, станет сразу всемирно известным»*.

К этой проблеме по-прежнему проявляется большой и живой интерес. В частности, сотрудники вычислительного центра Брукхэвинской национальной лаборатории собираются представить работу по доказательству гипотезы четырех красок. Один из этапов этого доказательства опирается на сложную вычислительную программу, над которой все еще работают в настоящее время.

---

* H. Coxeter. The four-color map problem, Math. Teacher, 52 (1959), 283—289.

С. К. Стейн *

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОЗАИКИ

Разнообразные задачи, относящиеся к теории чисел, к разбиениям евклидова пространства на кубы или крестообразные блоки из кубов, а также задачи из теории кодирования и теории игр привели к задачам из теории групп. Мы обсудим некоторые из этих проблем, их историю и некоторые детали алгебраических методов решения таких задач.

Предварительные замечания

Такие слова, как «кафель», «мозаика» обычно напоминают нам плоскость, разбитую на равные треугольники или выпуклые четырехугольники. Возможно, что слово «кафель» может напомнить нам паркет «в елочку», составленный из прямоугольников. Но в любом таком случае экземпляры (копии) какой-то фигуры при помощи некоторой совокупности движений заполняют без взаимных перекрытий (за исключением общих границ) другую фигуру.

Мы рассмотрим в этой статье только некоторые типы разбиений. В одном случае это будут разбиения n-мерного евклидова пространства R^n на равные и параллельно расположенные n-мерные кубы, или на равные и параллельные блоки, составленные из конечного числа кубов. Если одна фигура равна и параллельно расположена в пространстве относительно другой фигуры, то мы будем говорить, что одна фигура есть *трансляция* другой фигуры. Далее мы скажем, что пространство *разбито* на трансляции некоторой фигуры, если объединение этих трансляций заполняет все пространство, в то время как внутренние области трансляций попарно не перекрываются.

С другой стороны, рассмотрим вместе с группой G два подмножества A и B этой группы, причем такие, что каждый элемент из G однозначно представим в виде ab, где элемент a принадлежит A и b принадлежит B. Тогда мы можем себе представить группу G как бы разбитой на пересекающиеся множества — копии множества B: a_1B, a_2B,...

---

* С. К. Стейн — профессор математического факультета Калифорнийского университета.

или, что симметрично, на копии множества A: Ab_1, Ab_2, ... Это мы обозначим: $G=(A, B)$ и будем называть *разложением* группы G посредством подмножеств A и B.

В этой статье нам встретится также другой важный тип разбиения. Путь G — абелева группа, записанная аддитивно, и $\{s_1, s_2, \dots, s'_k\}$— множество целых чисел. Каждое число s_i определяет отображение $\bar{s}_i{:}G\to G$ по формуле $\bar{s}_i(g)=s_ig=$ $=g+g+\dots+g, s_i$ раз, если s_i — положительное, и $\bar{s}_i(g)=$ $=(-g)+(-g)\dots+(-g)$ $[s_i]$ раз, если s_i — отрицательное. Пусть каждый ненулевой элемент из G однозначно выражается в виде $\bar{s}_i(b)$, где b из некоторого фиксированного множества $B\subseteq G$. Будем обозначать это так:

$$G-\{O\}=\{s_1, s_2, \dots, s_к\}{:}\mathrm{B}$$

и говорить, что $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ расщепляет множество $G-\{O\}$. В этом случае множество $G-\{O\}$ разбивается на k копий множества B: s_1B, s_2B, ..., s_kB.

В частных случаях расщепление одной группы эквивалентно разложению другой группы. Чтобы быть конкретным, пусть p — положительное простое число и $C(p)$ — аддитивная группа целых чисел по модулю p. Допустим, что $\{s_1, s_2, \dots, s_к\}$ расщепляет $C(p)-\{O\}$. Пусть Z_p — поле вычетов по модулю p и C_p — его мультипликативная группа. Тогда мы имеем разложение

$$G=(\{s_1, s_2, \dots, s_к\}, B).$$

Например, так как имеет место расщепление $C_{13}-\{O\}=$ $=\{\pm1, \pm2\}:\{1, 3, 4\}$, то имеется следующее разложение:

$$G_{13}=(\{\pm1, \pm2\}, \{1, 3, 4\}).$$

Проблема Минковского

Гипотеза Минковского. Пожалуй, самой драматичной работой в вопросах разложения групп является работа Хайоша 1942 года, в которой он решил проблему, поставленную Минковским еще в 1907 году. Минковский сначала рассматривал один из вопросов теории чисел, который он быстро свел к вопросу о векторах и отсюда к проблеме разбиения пространства на равные кубы. Хайош выразил эту задачу на языке разложения конечной абелевой группы и решил ее. Давайте детально рассмотрим эти переходы, в целом такие же поразительные, как метаморфоза гусеницы в бабочку.

Исходная проблема касалась одновременного приближения нескольких вещественных чисел рациональными:

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ *и* t — *вещественные числа. Существуют ли целые числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *такие, что* $0 < x_n < t^{n-1}$ и $|\, a_1 - x_1/x_n \,| < 1/x_n t$; $|\, a_2 - x_2/x_n \,| < 1/x_n t$; $\ldots$;

$|\, a_{n-1} \,|\, x_{n-1}/x_n \,| < 1/x_n t$? (1)

Случай $n=2$, например, относится к вопросу о приближении отдельно взятого числа a_1 рациональным числом x_1/x_2, таким, что $|\, a_1 - x_1/x_2 \,| < 1/x_2 t$ и $0 < x_2 < t$ (заметим, что из двух неравенств следует $a_1 - x_1/x_2 < 1/x_2^2$). Если $t=2$ и $a_1 = 1/2$, то x_2 должен быть равен единице, и неравенство $|\, a_1 - x_1/x_2 \,| < 1/x_2 t$ не может выполняться. Однако, как ниже будет показано, если t — не целое, то система неравенств (1) может быть удовлетворена.

Мы рассмотрим развитие этой задачи в случае $n=3$, так как этот случай иллюстрирует существо вопроса для произвольного n и сравнительно легко поддается описанию.

Вопрос Минковского в случае $n=3$ можно, предварительно избавившись от знаменателей, переформулировать следующим образом:

Пусть a_1, a_2 *и* $t > 1$ — *вещественные числа. Существуют ли целые числа* x_1, x_2, x_3, *не все равные 0, такие; что*

$$\begin{aligned} &|t x_1 + 0 x_2 - a_1 t x_1| < 1; \\ &|0 x_1 + t x_2 - a_2 t x_3| < 1; \\ &|0 x_1 + 0 x_2 + (1/t^2)\, x_3| < 1? \end{aligned} \qquad (2)$$

Определитель матрицы, состоящей из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 в системе неравенств (2),

$$\begin{pmatrix} t & 0 & -a_1 t \\ 0 & t & -a_2 t \\ 0 & 0 & -1/t^2 \end{pmatrix}$$

равен единице. Минковский поставил более общий вопрос.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

— *вещественная матрица с определителем 1. Когда существуют целые* x_1, x_2, x_3, *не все равные 0, но удовлетворяющие системе неравенств*:

$$\begin{aligned} |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3| &< 1 \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3| &< 1 \\ |b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3| &< 1 \end{aligned}$$

Такие целые числа x_1, x_2, x_3 существуют не всегда. Например, единственным целочисленным решением следующей системы неравенств

$$\begin{aligned} |1x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3| &< 1 \\ |0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + b_{23}x_3| &< 1 \\ |0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3| &< 1 \end{aligned}$$

является (0, 0, 0). В самом деле, очевидно, что x_3 должен быть равен 0, тогда $x_2=0$ и окончательно $x_1=0$.

Чтобы найти те дополнительные условия на матрицу B, которые гарантировали бы нетривиальное решение системы неравенств (4), Минковский трансформировал этот вопрос в чисто геометрический.

В связи с этим заметим, что три вектора столбца

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

порождают параллелепипед единичного объема.

В дальнейшем для удобства мы не будем отличать вектор от точки, координаты которой суть компоненты этого вектора.

Пусть v_1, v_2, v_3 — три линейно независимых вектора в R^3. Совокупность всех векторов (точек) вида $x_1\bar{v}_1+x_2\bar{v}_2+$ $+x_3\bar{v}_3$, где коэффициенты x_1, x_2, x_3 пробегают независимо друг от друга множество целых чисел, называется (трехмерной) решеткой, а тройка векторов $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ — базисом этой решетки. Отметим, что разных базисов у данной решетки бесконечно много.

На рис. 1 изображена двумерная решетка (точнее, часть решетки) с базисом $\bar{v}_1=(3/2, 1)$, $\bar{v}_2=(1/2, 1)$. Пара векторов $v_1'=(1, 0)$, $\bar{v}_2'=(1/2, 1)$ является другим базисом этой решетки.

Решетка называется унимодулярной, если вектора ее базиса $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ порождают параллелепипед единичного объема. Обозначим через C куб, ребра которого равны 2 и параллельны осям координат, а центр лежит в начале. Тогда вопрос Минковского можно прочесть иначе. *Когда* *внутри куба C лежит ненулевой вектор унимодулярной решетки?*

Если вместо требования, чтобы ненулевой вектор унимодулярной решетки лежал *внутри* куба C, потребовать только, чтобы ненулевой вектор лежал в кубе C (возможно, и на его поверхности), то, как показал Минковский, это

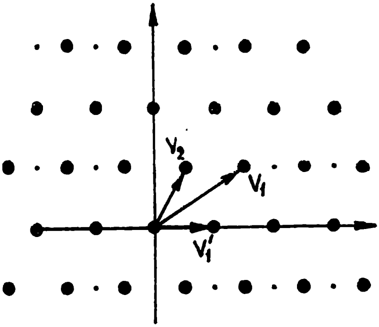


Рис. 1

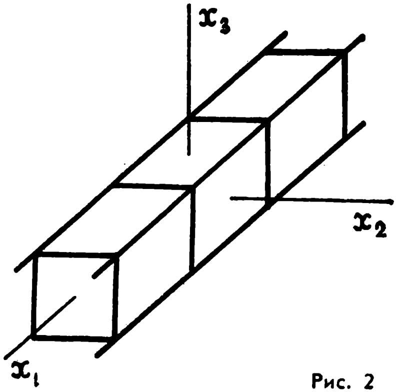


Рис. 2

верно всегда. Его рассуждения приблизительно таковы. Пусть D — куб с ребром единица, параллельный осям, и центр его находится в начале координат. Рассмотрим множество всех трансляций куба D на вектора решетки $x_1\bar{v}_1+x_2\bar{v}_2+x_3\bar{v}_3$ (x_1, x_2, x_3 — целые). Такое множество трансляций называют *решеткой трансляций*.

Сопоставим каждый вектор решетки $x_1\bar{v}_1+x_2\bar{v}_2+x_3\bar{v}_3$ трансляции на этот вектор параллелепипеда P, порожденного векторами $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$. Так как объем параллелепипеда равен единице, то число точек решетки в большой области объёма V (скажем, подобной параллелепипеду P) приблизительно равно V. Так что в этой области имеется приблизительно V трансляций единичного куба D. Вследствие того, что объем куба D также равен 1, то эти трансляции не могут быть разобщенными — некоторые из них должны пересекаться, возможно, только своими поверхностями, т. е. должны найтись два вектора решетки $\bar{v}$ и $\bar{v}^*$, такие, что трансляции куба D на вектора $\bar{v}$ и $\bar{v}^*$ пересекаются. А значит, найдутся и две точки $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ в кубе D, для которых $\bar{v}+\bar{c}=\bar{v}^*+\bar{c}^*$. Запишем это иначе: $\bar{v}-\bar{v}^*=\bar{c}^*-\bar{c}$.

Поскольку вектор $\bar{c}^*-\bar{c}$, очевидно, лежит в (удвоенном) кубе C, а вектор $\bar{v}-\bar{v}^*$ — ненулевой вектор решетки, то получаем известную теорему Минковского (о произведении линейных форм) о том, что *в кубе C обязательно содержится (внутри или на границе) ненулевой вектор решетки.*

Таким образом, система неравенств (4), если в ней заменить знак $<$ знаком $\leqslant$, обязательно имеет нетривиальное решение.

Как мы уже видели раньше, если

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

то система (4) имеет только тривиальное решение. Это же утверждение верно и в более общей форме: если вектора

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} \tag{8}$$

составляют попросту другой базис решетки, порожденной векторами $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ вида (7), то система неравенств

$$\begin{aligned} &|c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3| < 1; \\ &|c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{92}x_3| < 1; \\ &|c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3| < 1 \end{aligned} \tag{9}$$

не имеет других, кроме ненулевого, целых решений. Это утверждение приводит к гипотезе Минковского, которую мы формулируем для случая $n=3$.

Пусть (c_{ij}) — (3×3) — матрица, определитель которой равен единице. Если целочисленным решением системы вида (9) является лишь (0, 0, 0), *то решетка, порожденная векторами $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, обладает базисом из векторов $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ вида* (7) (*или векторов, которые отличаются от $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ одновременной во всех трех векторах перестановкой координат*).

Если эта гипотеза справедлива, то по крайней мере в одной строке матрицы (c_{ij}) все числа должны быть целыми. Поэтому, в частности, если t — не целое, то система неравенств (2) должна иметь ненулевое решение. Другими словами, система неравенств (4) имеет лишь тривиальное решение (0, 0, 0) тогда и только тогда, когда вещественная матрица (3) с определителем 1 унимодулярно эквивалентна треугольной матрице, у которой на диагонали единицы.

Минковский высказал свою гипотезу чисто геометрически. Из утверждения, что решетка трансляций единичного куба D имеет базис вида, скажем,

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ 1 \end{pmatrix},$$

следует прежде всего, что куб с ребром 1 и центром в (1, 0, 0) присутствует в этой решетке трансляций. Это значит, что

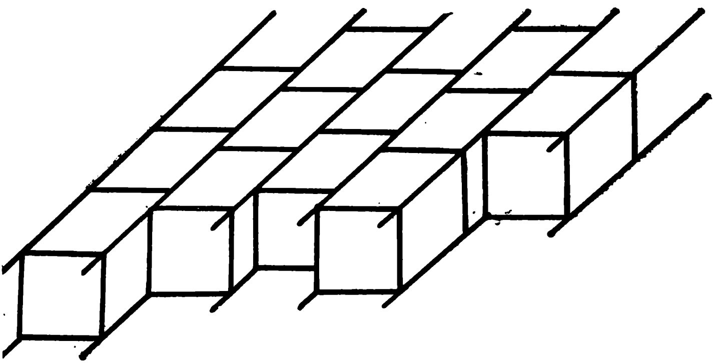


Рис. 3

два единичных куба с центрами в (0, 0, 0) и (1, 0, 0) смежны по целой двумерной грани. Так как решетка трансляций куба однородна в том смысле, что каждый куб в ней играет одинаковую роль, то решетка должна быть составлена из «колонок» кубов, параллельных оси X_1. Одна такая (бесконечная) колонка показана на рис. 2.

Тогда присутствие в базисе решетки вектора $\bar{v}_2=(b_{12}, 1, 0)$ эквивалентно существованию другой колонки из кубов на той же высоте и касающейся первой колонки, но, быть может, сдвинутой относительно первой вдоль направления X_1. Таким образом, разбиение пространства R^3 предполагает разбиение слоя $|X_3|\leqslant 1/2$, как показано на рис. 3.

Трансляции этого слоя на вектора $x_3\bar{v}_3$ составляют разбиение всего пространства. Другими словами, это разбиение можно построить шаг за шагом, составляя сначала из кубов колонки, затем из колонок формируя слои. Мы пришли к геометрической формулировке гипотезы Минковского для произвольного n.

Если трансляции n-мерного куба разбивают n-мерное пространство по решетке, то некоторая пара кубов смежна по целой (n—1)-мерной грани.

Эта формулировка появилась в 1907 году. Эта же проблема в арифметической форме была поставлена одиннадцатью годами раньше.

Подтверждение Хайошем гипотезы Минковского

Минковский легко подтвердил свою гипотезу для $n=2$ и 3. В 1909 году Янсен позаботился о случаях $n=4$, 5, 6. В 1930 году Келлер обобщил гипотезу, отбросив предположение, что кубы образуют решетку. Используя только предположение, что параллельные кубы с ребром 1 разбивают пространство, он доказал: для любых двух таких кубов найдется координатная ось, вдоль которой координаты их центров отличаются на целое число. Делая обзор работ по этой проблеме, выполненных к 1940 году, Перрон заметил: «Я вынужден признать, что в большинстве работ я наталкивался хотя бы раз, а то и чаще, на такие места, где я не в состоянии был следовать линии рассуждения автора. Так что я в действительности не знаю, в какой мере эти утверждения являются доказанными. Отчасти, но не полностью это могло быть от того, что мне недоставало того тончайшего интуитивного представления n-мерного пространства и проницательности, которыми кажется, наделены другие авторы».

В этой работе Перрон проверяет версию Келлера для $n \leqslant 6$ и сводит проблему для любого числа измерений n к конечной задаче о 2^n параллельных кубах с ребрами 1, центры которых особым образом расположены в других 2^n единичных кубах, которые составляют куб с ребром 2. На этом он и оставил задачу, трудность которой стремительно возрастает с ростом числа измерений.

Вскоре после этого, в 1942 году, Хайош обосновал гипотезу Минковского, в которой предполагается, что кубы расположены по решетке. Это он сделал после предварительной отливки этой гипотезы в форму эквивалентной гипотезы о конечных абелевых группах. Мы опишем здесь эту окончательную формулировку.

Давайте рассмотрим только случай $n=2$, плоскость, так как этот случай хорошо иллюстрирует общую идею и его легко изобразить. Представим, что плоскость разбивается по решетке на единичные квадраты, параллельные

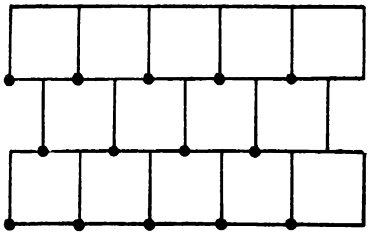


Рис. 4

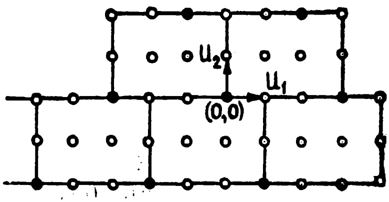


Рис. 5

осям координат. Будем задавать положение квадрата на плоскости его нижней левой вершиной (см. рис. 4). Эти точки образуют группу (решетку) L^*.

Прежде всего Хайош свел общий случай к тому, когда точки группы L^* имеют рациональные координаты. Если это так, то линейное преобразование вида $(X, Y) \to (m_1X, m_2Y)$, где m_1 и m_2 — некоторые целые положительные числа, превращает группу (решетку) L^* в подгруппу (подрешетку) L, точки которой имеют целые координаты. Одновременно линейное преобразование переводит единичные квадраты в $(m_1 \times m_2)$-прямоугольники, по-прежнему параллельные осям.

В этой новой ситуации мы имеем группу (решетку) H всех точек с целыми координатами и подгруппу L, состоящую из левых нижних вершин семейства $(m_1 \times m_2)$-прямоугольников, которые разбивают плоскость (см. рис. 5). Затем Хайош выразил гипотезу Минковского в терминах фактор-группы $G=H/L$.

Пусть $u_1=(1, 0)$ и $u_2=(0, 1)$ — стандартные единичные векторы в H (см. рис. 5). Пусть также $a_1=u_1+L$ и $a_2=u_2+L$ — соответствующие элементы в $G=H/L$ (мы будем операцию в G записывать мультипликативно, а операцию в H — аддитивно).

Предположение, что прямоугольники разбивают плоскость, состоит из двух условий:

1) прямоугольники покрывают плоскость;

2) прямоугольники не перекрываются (за исключением их границ).

Предположение, что $(m_1 \times m_2)$-прямоугольники покрывают плоскость, читается в терминах группы H следующим образом:

Для любого элемента h из H существует элемент l из, L и целые числа e_1 и e_2 с условием $0 \leqslant e_i \leqslant m_i$, $i=1, 2$, такие, что

$$h=l+e_1u_1+e_2u_2.$$

В терминах фактор-группы G это означает: каждый элемент g из G может быть записан в виде

$$g=a_1^{e_1}a_2^{e_2},\ 0 \leqslant e_i < m_i,\quad i=1,\ 2.$$

Допущение, что $(m_1 \times m_2)$-прямоугольники не перекрываются, читается в терминах H:

Если l_1 и l_2 из L и $0 \leqslant e_i$, $e_i' \leqslant m_i$, $i=1$, 2 $l_1+e_1u_1+$ $+e_2u_2=l_1'+e_1'u_1+e_2'u_2$, то $e_1=e_1'$ и $e_2=e_2'$.

В терминах группы G это условие можно высказать так:

Если $a_1^{e_1}a_2^{e_2}=a_1^{e_1'}a_2^{e_2'}$, $0 \leqslant e_i$, $e_i' < m_i$, то $e_1=e_1'$ и $e_2=e_2'$.

Таким образом, условия гипотезы Минковского теперь полностью выражены в терминах группы G, которая между прочим состоит из m_1m_2 элементов. Как же читается заключение гипотезы?

Представим, что два прямоугольника смежны по целой стороне, параллельной, скажем, оси Y. Не уменьшая общности, можно считать, что общая сторона является правой стороной прямоугольника, нижняя левая вершина которого лежит в начале координат. Тогда точка m_1u_1 принадлежит L. В терминах группы G это выражается уравнением $a_1^{m_1}=1$.

Это приводит к следующей формулировке гипотезы Минковского для n-мерного пространства:

Пусть G — конечная абелева группа и пусть $a_1, a_2, \ldots,$ a_n — n элементов из G. Пусть также порядок элемента a_i не меньше m_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Предположим, что каждый элемент из G однозначно выражается в виде

$$a_1^{e_1}\ a_2^{e_2}\ \ldots a_n^{e_n},$$

где $0 \leqslant e_i < m_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. *Тогда хотя бы для одного номера i выполняется $a_i^{m_i}=1$.*

В таком виде гипотеза касается вопроса о разложении группы G на n множеств

$$G=(\{1, a_1, \dots, a_1^{m_1-1}\}; \{1, a_2, \dots, a_2^{m_2-1}\}; \dots; \{1, a_n, \dots, a_n^{m_n-1}\})$$

и утверждает, что по крайней мере одно из этих множеств есть группа. В этой форме проблема Минковского была решена окончательно.

После решения Хайошем проблемы Минковского интерес к разбиению пространства на равные кубы пропал. Кажется, никто не занялся ни гипотезой Келлера, в которой отбрасывается предположение о решетке, ни задачей о 2^n кубах в n-мерном пространстве. Но теорема Хайоша породила новые вопросы и дальнейшие исследования. Быть может, наиболее интересным является обобщение теоремы Хайоша, сделанное в 1965 году Редеи, в котором уже не требуется, чтобы факторы были циклическими.

Теорема Редеи. *Пусть G — конечная абелева группа и пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ — подмножества из G, каждое из которых содержит единичный элемент и имеет простой порядок. Допустим, что G разложима в том смысле, что каждый элемент из G однозначно выражается как произведение $a_1 a_2 \dots a_m$, где a_i принадлежит A_i. Тогда хотя бы одно из множеств A_i есть группа.*

Нетрудно свести теорему Хайоша к тому случаю, когда каждое число m_i — простое. Так что теорема Редеи в самом деле является обобщением теоремы Хайоша.

Другая связь с задачами геометрических разбиений

Теория выпуклых тел содержит многочисленные результаты о разбиениях, упаковках и покрытиях пространства трансляциями выпуклого тела. Если выпуклые тела из данного семейства попарно не пересекаются (за исключением границ), то семейство называется *упаковкой*; если объединение тел из данного семейства есть все пространство, то семейство называется *покрытием*. Таким образом, разбиение пространства на выпуклые тела является одновременно и упаковкой и покрытием.

Известно, что для любой выпуклой фигуры на плоскости плотнейшая упаковка ее трансляций обеспечивается, в частности, решетчатой упаковкой. Касаясь одной геометрической проблемы, Цассенхауз отметил: «Чрезвычайно интересно наблюдать, как одна из плотнейших упаковок X-допустимых точечных множеств оказывается «решеткой с базой», то есть точечным множеством, которое есть объединение конечного числа трансляций геометрических решеток... Этот факт (несколько неопределенно сформулированный), что оптимальные дискретные распределения стремятся к решеткам с базой, был известен каждому ученому, интересовавшемуся физикой твердого тела, вследствие открытий Брэгга и Лауэ... Можно ли предполагать, что решетки с базой представляют собой образец оптимальной упаковки?»* Цассенхауз, по-видимому, имел в виду тот факт, что когда жидкость застывает, то она стремится к форме кристалла, имеющего обычно ту конфигурацию, которая минимизирует полную внутреннюю энергию.

У этого вопроса имеется один алгебраический аналог, правда, скорее для разбиений, нежели для упаковок, который сводится к следующему. Пусть $Z^n = Z \times Z \times \ldots \times Z$ — свободная абелева группа с n образующими (аналог n-мерного евклидова пространства) с покоординатным сложением. Пусть A — конечное подмножество группы Z^n. Предположим, что существует такое множество B, что $Z^n = (A, B)$. Существуют ли в таком случае в группе Z^n подгруппа H и *конечное* множество S, такие, что $Z^n = (A, H, S)$? (Множество $H+S$ играет роль «решетки с базой».) Ответ на этот вопрос неизвестен.

Разбиение евклидова пространства на кресты и полукресты

Непосредственным обобщением выпуклых тел являются так называемые звездные тела. Звездное тело, по определению, содержит хотя бы одну точку, из которой просматривается вся граница. Выпуклое тело, очевидно, является звездным: из любой точки выпуклого тела граница видна полностью (см. рис. 6). Теория звездных тел достаточно хорошо развита. Мы затронем здесь только два типа звездных тел, так называемые «кресты» и «полукресты», потому что проблемы разбиений пространства на такие тела, хотя и слишком общие, могут быть обработаны алгеб-

---

* H. Zassenhaus. Modern developments in the theory of numbers. Bull. Amer. Math. Sos., 67 (1961), 426—439.

раически и еще вследствие их значения для комбинаторики и теории кодирования.

Пусть k — натуральное число. Рассмотрим в пространстве R^n $kn+1$ трансляций единичного n-мерного куба с центрами в точках, координаты которых $(0, 0, \ldots, 0)$, $(j, 0, \ldots, 0)$, $(0, j, 0, \ldots, 0) \ldots (0, 0, \ldots, j)$, где $j=1, 2, \ldots, k$.

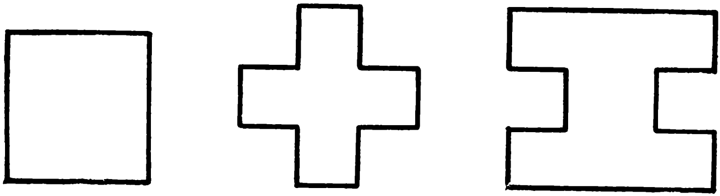


Рис. 6

Объединение этих трансляций называется (k, n)-*полукрестом.* (k, n)-полукрест состоит из n «брусьев» длины k, приставленных к граням «углового» куба. На рис. 7 изображен (2, 3)-полукрест. Если мы, помимо этих трансляций единичного куба, рассмотрим дополнительно трансляции с центрами в точках $(-j, 0, \ldots, 0)$, $(0, -j, 0 \ldots 0) \ldots (0, 0, \ldots -j)$, то получим (k, n)-крест; (k, n)-крест, очевидно, центрально-симметричен (см. рис. 7).

Мы будем предполагать, что при разбиении пространства на кресты или полукресты центры кубов имеют целочисленные координаты. По существу, мы сейчас подменяем пространство R^n свободной группой Z^n с n образующими.

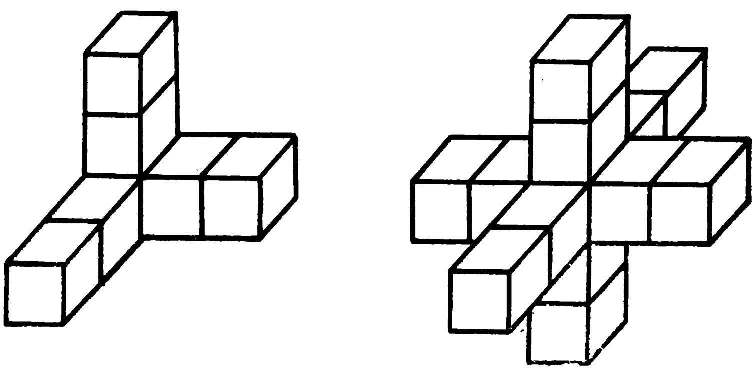


Рис. 7

Следующая теорема подсказывает определенный тип алгебраических задач, к которому приводят такие разбиения, а также объясняет, почему решетчатые разбиения на полукресты или кресты особенно легко поддаются алгебраической обработке.

Теорема. *Пространство R^n разбивается по решетке на (k, n)-полукресты тогда и только тогда, когда множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ расщепляет абелеву группу G порядка $kn+1$,* т. е.

$$G-\{0\}=\{1, 2, \ldots, k\} : \{g_1, g_2, \ldots, g_n\},$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — элементы группы G.

Доказательство. Пусть Z_n — свободная абелева группа с n образующими (группа целых точек в пространстве R^n). Если R^n разбивается на (k, n)-полукресты по решетке, то центры угловых кубов полукрестов образуют подгруппу H группы Z^n. Пусть G — фактор-группа Z^n/H и $f:Z^n\to G$ — естественный гомоморфизм (каждый элемент группы Z^n отображается в свой смежный класс). Обозначим через E_j базисный единичный вектор в j-м направлении $(0, \ldots 0, 1, 0, \ldots 0)$, (единица находится на j-м месте) и пусть $g_j=f(E_j)$. Заметим, что Z^n есть объединение $kn+1$ смежных классов вида $c+H$, где c — центр одного из кубов в полукресте, угол которого размещен в начале координат. Таким образом, поскольку c пробегает kn точек вида iE_j, $1\leqslant i\leqslant k$ $1\leqslant j\leqslant n$ и, кроме этого, начало координат, то $f(c)$ пробегает все элементы группы G. Так что мы получаем расщепление группы.

Обратно, предположим, что G есть абелева группа порядка $kn+1$ и каждый ее ненулевой элемент однозначно выражается в виде ig_j, $1\leqslant i\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant n$. Определим отображение f:5 $Z^n\to G$ как единственный гомоморфизм, при котором $f(E_j)=g_j$, и пусть H — ядро f. Тогда множество полукрестов, центры угловых кубов которых расположены в точках из H, образуют разбиение пространства R^n.

Точно так же можно показать, что (k, n)-кресты разбивают R^n по решетке в том и только в том случае, если множество $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k\}$ расщепляет абелеву группу порядка $2kn+1$. В частности, так как $C(13)-\{0\}=\{\pm 1, \pm 2\}$: $:\{1, 3, 4\}$ (см. «Предварительные замечания»), то (2, 3)-крест разбивает трехмерное евклидово пространство.

Итак, вопрос, «когда полукрест или крест разбивает пространство R^n по решетке», сводится к вопросу о расщеплении конечных абелевых групп. Оба эти вопроса далеки от своего разрешения.

Л. Фейеш Тот*

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С МОЗАИКАМИ

1. Правильная форма пчелиных сот, их характерное расположение привлекали к себе внимание уже в древности. *Папп Александрийский* объяснял шестиугольную форму пчелиных сот тем, что среди правильных многоугольников равной площади, заполняющих плоскость (т. е. среди правильных треугольников, четырехугольников и шестиугольников), шестиугольник имеет наименьший периметр. Шестиугольная мозаика встречается также во многих других природных структурах (например, в сетчатке человеческого глаза), и возможно, что образование всех этих структур связано с замечанием *Паппа*. Поэтому было бы весьма желательно доказать это «изопериметрическое свойство» шестиугольных мозаик при более широких условиях. Так возникает задача: разбить данную область на большое, но заданное число частей равной площади при помощи самой «короткой» сетки. Более точно:

а) разбить плоскость на куски единичной площади так, чтобы средний периметр этих кусков был возможно меньшим.

В этой статье мы рассматриваем следующую, двойственную проблеме а) задачу:

б) разбить плоскость на куски единичного периметра так, чтобы средняя площадь этих кусков была возможно большей.

Говоря более простым языком, мы хотим покрыть плоскую область достаточно большой площади сетью, состоящей, скажем, из тысячи ячеек единичного периметра.

Помимо евклидовой плоскости, мы распространим наши исследования и на сферу и гиперболическую плоскость. Но прежде мы дадим обзор известных результатов в этом направлении.

2. Я давно заметил, что частный случай задачи, а именно когда области предполагаются выпуклыми, может быть легко решен. Я рассмотрел аналогичную сферическую задачу и доказал следующую теорему.

---

* Ласло Фейеш Тот — известный венгерский математик; возглавляет математический институт Венгерской академии наук.

Разобъем поверхность единичной сферы на $n \geqslant 2$ выпуклых многоугольников равной площади. Если через L обозначить сумму периметров многоугольников, то

$$L \geqslant 12(n-2)\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right).$$

Равенство выполняется только для правильного разбиения с трехгранными вершинами.

При больших значениях n это неравенство является асимптотически точным и выражает соответствующее экстремальное свойство шестиугольной мозаики на евклидовой плоскости. Так что можно сказать, что написанное неравенство является точным при $n=3,4,\ 6,\ 12$ и ∞.

Доказательство основано на выпуклости одной довольной сложной функции, а именно на выпуклости следующей функции от ν:

$$P(\nu,\ a) = 2\nu \arccos \frac{\cos\dfrac{\pi}{\nu}}{\cos\dfrac{2\pi-a}{\nu}} \quad (\nu > 2,\ 0 < a < 2\pi).$$

При целых значениях ν $P(\nu,\ a)$ равно периметру правильного ν-угольника площади a.

Следующая теорема касается правильных сферических, евклидовых и гиперболических мозаик с трехгранными вершинами. На сфере таких мозаик четыре, в евклидовой плоскости только одна, а в гиперболической бесконечно много.

Пусть U — объединение n ячеек правильной мозаики с трехгранными вершинами. Тогда среди всех разбиений множества U на n выпуклых многоугольников равной площади правильное разбиение имеет минимально возможную сумму периметров своих ячеек.

Получение аналогичных результатов для разбиений, состоящих не только из выпуклых кусков, представляется трудной задачей. Яркий свет на эти трудности пролило следующее интересное замечание *Хеппеша*: если целое число $n > 1$ не является делителем 12, то кратчайшая сеть, делящая сферу на n частей равной площади, всегда содержит невыпуклую ячейку. С другой стороны, можно предположить, что для $n=2,\ 3,\ 4,\ 6$ и 12 экстремальная мозаика состоит только из выпуклых ячеек, и тогда в силу вышеприведенной теоремы должна быть правильной. Имеется изящное доказательство этого предположения в случае

$n=2$. Пусть c — простая замкнутая кривая, делящая сферу на две равновеликие части. Отражая кривую c в центре сферы, получаем другую кривую, которая должна пересечь кривую c в некоторой точке A. Так как точка, противоположная точке A, также принадлежит кривой c, то длина кривой не меньше 2π и равна 2π только тогда, когда A — большая окружность.

Ну а если ячейки не полностью заполняют пространство, как это бывает в самых разнообразных биологических или растительных тканях? Тогда рассмотрение таких тканей приводит к новым математическим задачам. Рассмотрим ткань из неперекрывающихся пластичных ячеек, содержащихся в некоторой части пространства. Предполагая, во-первых, что ячейки имеют одинаковый постоянный объем, мы можем спросить, какую форму и расположение должны иметь эти ячейки, чтобы полная площадь их поверхностей была как можно меньшей. С другой стороны, предполагая, что ячейки имеют одинаковую постоянную поверхностную площадь, спросим, при какой форме ячеек и их расположении объем их будет возможно большим.

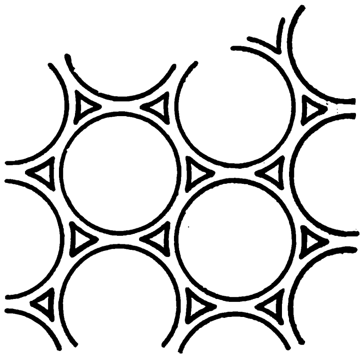


Рис. 1

На рис. 1 показан поперечный срез волокнистой ткани стебля кукурузы. Эти ячейки представляют собой маленькие колонки, вытянутые вдоль осевого направления, и их объем и поверхностную площадь можно считать пропорциональными соответственно площади и периметру их сечений. Так что упомянутые трехмерные задачи сводятся здесь к двумерным.

А) Рассмотрим в евклидовой плоскости множество неперекрывающихся связных дисков равной площади. Предположим, что форму и положение дисков можно менять, сохраняя при этом их общую площадь и плотность их распределения. Каковы те форма и расположение дисков, которые обеспечивают минимально возможный средний периметр?

Б) Рассмотрим в евклидовой плоскости множество неперекрывающихся связных дисков равного периметра. Допустим, что форму и положение дисков можно менять, сохраняя их общий периметр и плотность их распределения. Каковы те форма и расположение дисков, которые обеспечивают максимально возможную среднюю площадь дисков?

Эти задачи, которые можно рассматривать как основные изопериметрические задачи о двумерных ячеистых совокупностях, очевидно, являются обобщением сформулированных ранее основных изопериметрических задач о мозаиках, а именно задач а) и б).

В том случае, когда диски выпуклы, проблема Б) была решена автором, а проблема А) — автором в сотрудничестве с *Хеппешем*. Давайте при постоянной плотности увеличивать одинаковый для каждого диска периметр или одинаковую площадь, начиная с очень малых значений. Тогда экстремальными областями будут сначала расположенные произвольно круги; при некотором значении периметра или площади эти круги образуют стесненную гексагональную упаковку; затем они начнут раздуваться в шестиугольники с закругленными краями; и наконец, они превратятся в правильные шестиугольники, заполняющие плоскость без промежутков.

Позднее *Хеппеш* заметил, что решение задачи Б), данное для выпуклых дисков, можно распространить на общий случай. Это включает в себя полное решение задачи б):

При разбиении евклидовой плоскости на связные куски с периметрами, не превосходящими единицы, средняя площадь кусков не может быть больше, чем площадь правильного шестиугольника с единичным периметром.

Сейчас мы рассмотрим задачу б) в следующей эквивалентной формулировке: как разбить данную область на n частей как можно меньшего периметра.

3. Поверхность сферы может быть разбита на n частей, каждая из которых имеет сколь угодно малый периметр, но ситуация меняется, если предположить при этом, что площадь ни одной из этих частей не превосходит площади полусферы. Такое разбиение мы будем называть *нормальным*. Докажем следующую теорему.

При любом нормальном разбиении единичной сферы на $n>1$ связных частей наибольший из периметров равен λ_n, где

$$\lambda_n = \begin{cases} 2\pi & \text{для } n=2 \\ 12\dfrac{n-2}{n}\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\dfrac{n}{n-2}\dfrac{\pi}{6}\right) & \text{для } n>2. \end{cases}$$

Равенство может достигаться только при $n=2$, 3, 4, 6 и 12, а именно если области разбиения представляют собой либо две полусферы, либо три двуугольника («арбузные дольки», одна из которых может быть полусферой), либо четыре правильных треугольника, либо шесть правильных четырехугольников, либо двенадцать правильных пятиугольников.

Принимая во внимание то, что наше неравенство при больших значениях n асимптотически точно, можно сказать, что равенство имеет место при $n=\infty$ в случае правильного гексагонального разбиения. Отметим еще, что $\lambda_2=\lambda_3>\lambda_4>\dots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n\lambda_n^2=2\sqrt{3}\,\pi$.

При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующим известным фактом, что если замкнутая кривая на сфере пересекается с каждой большой окружностью, то ее длина не меньше 2π и равна 2π только в том случае, когда эта кривая состоит из двух больших полуокружностей.

Предположим сначала, что каждая из областей d_1, d_2, ..., d_n разбиения односвязна. В этом случае можно также считать, что каждая область d_i лежит в некоторой замкнутой полусфере. Если бы это было не так, то каждая большая окружность должна была иметь общую с d_i точку. Но поскольку площадь d_i по условию не больше 2π, то каждая большая окружность пересекала бы границу области d_i, и, значит, в силу только что упоминавшегося факта периметр области был бы больше 2π.

Если сфера разбита только на две связные области, то эти области обязательно односвязны. Так что из приведенных рассуждений следует корректность нашей теоремы для $n=2$. Поэтому дальше мы будем предполагать, что $n>2$.

Заменим каждую область d_i ее выпуклой оболочкой c_i. При этом периметр ни одной из областей не увеличится. Можно также предполагать, что ни одна из областей c_1, ..., c_n не покрыта другой областью. Действительно, в противном случае можно опустить эту область, и задача сведется к случаю $n-1$ областей вместо n областей.

Теперь мы перейдем к описанию процесса, при помощи которого области c_1, ..., c_n будут стягиваться к выпуклым многоугольникам p_1, ..., p_n, покрывающим сферу без перекрытий. Пусть c_i и c_j — две области, имеющие одну общую внутреннюю точку. Так как, согласно нашему предположению, ни одна из областей не содержится в другой, то на границе области c_i найдется точка, лежащая вне области c_j. Давайте обойдем границу области c_i в каком-нибудь направлении, отправляясь из точки, внешней по отношению к области c_j. Тогда существует точка A, в которой мы войдем внутрь области c_j, и точка B, в которой выйдем из c_j. Мы утверждаем, что больше таких точек «пересечения» нет. Пусть A, B, A' и B' — четыре последовательные точки пересечения (рис. 2). На каждой из открытых дуг $B'A$ и BA' границы области c_i найдется по точке, принадлежа-

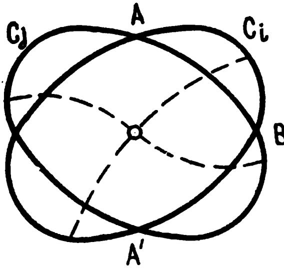


Рис. 2

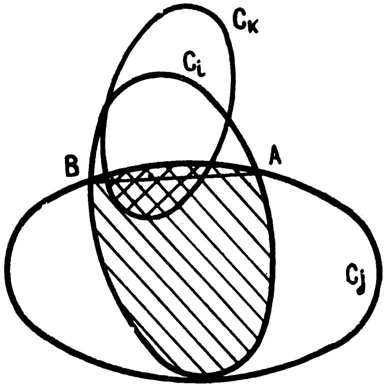


Рис. 3

щей границе области d_i. Так как область d_i связна, то эти точки можно соединить дугой, проходящей внутри d_i. Аналогично можем найти на дуге AB, а также и на дуге $A'B'$ границы области c_j граничные точки области d_j, которые соединим дугой, проходящей внутри области d_j. Эти две дуги содержатся также и в областях c_i и c_j соответственно. Поэтому они пересекаются. Но это невозможно, потому что области d_i и d_j не имеют общих внутренних точек.

Заменим теперь c_i и c_j областями $c'_i \subset c_i$ и $c'_j \subset c_j$, объединение которых совпадает с объединением областей c_i и c_j, но пересечение сводится к отрезку AB. При этом могло бы оказаться, что отрезок AB пересекал бы границу какой-то третьей области c_k в двух точках. Тогда граница c_k пересекала бы границу, скажем c'_i, в четырех точках (рис. 3), так что описанное выше стягивание нельзя было бы применить к областям c_k и c'_i. Но эта ситуация может встретиться, только если пересечение c_j и c_k содержится в пересечении c_i и c_j. Поэтому если применять стягивание всегда только к таким парам областей, пересечение которых не содержится в пересечении другой пары областей, то области $c_1, \ldots, c_n$ не более чем за $\binom{n}{2}$ шагов стянутся в многоугольники $p_1, \ldots, p_n$ с требуемым свойством.

Если $n=3$, то это построение приводит либо к трем двуугольникам (один из которых может быть полусферой), либо (если одна из областей была опущена) к двум полусферам. Периметр этих областей равен 2π. Поэтому если одна из них была первоначально невыпуклой, то ее периметр должен быть больше 2π. Таким образом, можно в дальнейшем предполагать, что $n>3$.

Если p есть наибольший из периметров многоугольников, то ввиду изопериметрического свойства правильных многоугольников имеем $p_i \leqslant A(\nu_i, p)$, где ν_i есть число сторон многоугольника p_i и .

$$A(\nu, p) = 2\pi - 2\nu \arccos\frac{\cos\frac{\pi}{\nu}}{\cos\frac{p}{2\nu}} = 2\pi - P(\nu, 2\pi - p).$$

Поскольку $P(\nu, a)$ — выпуклая функция от ν ($\nu>2$, $0\leqslant a\leqslant 2\pi$), то $A(\nu, p)$ — вогнутая возрастающая функция от ν ($\nu>2$, $0\leqslant p\leqslant 2\pi$) (ее монотонность следует из вогнутости и существования предела $\lim\limits_{\nu\to\infty} A(\nu, p)$. Следовательно,

$$4\pi=\sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} A(\nu_i, p) \leqslant nA(6-12/n, p),$$

откуда получаем $p \geqslant \lambda_n$.

Равенство выполняется только, если число $m=6-12/n$ есть целое и каждый многоугольник — правильный m-угольник периметра p, а это имеет место только в указанных в теореме случаях. Если не все из областей $d_1, \ldots, d_n$ первоначально были выпуклы, то одна из них, вероятно, имеет периметр больше λ_n.

Мы еще должны исследовать случай, когда некоторые из данных областей $d_1, \ldots, d_n$ неодносвязны. Предположим, например, что область d_i ограничена двумя отдельными простыми кривыми s_1 и s_2. Каждая из этих кривых разбивает сферу на две части. Рассмотрим часть сферы p', определяемую кривой s_1, которая содержит область d_i, а также часть p'', определяемую кривой s_2, которая не содержит область d_i. Переместим область p'' в области p'

так, чтобы p'' и p' имели общую граничную точку. Таким способом каждая неодносвязная область может быть заменена областью, ограниченной замкнутой (но не простой) кривой. И опять можно считать, что каждая из этих новых областей лежит в замкнутой полусфере, так что можно применить вышеприведенное доказательство без каких-либо изменений.

4. Сейчас мы приступаем к доказательству следующей теоремы.

Пусть U-объединение n различных ячеек правильной евклидовой или гиперболической мозаики, у которой во всякой вершине сходятся три ребра. Как бы мы ни разбивали U на n связных частей, наибольший из периметров этих частей будет превосходить λ, где λ — периметр одной ячейки в мозаике. Равенство имеет место лишь в случае правильного разбиения.

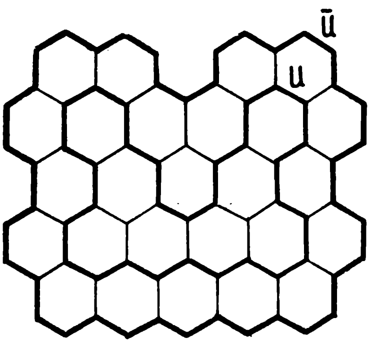


Рис. 4

Здесь под правильным разбиением мы понимаем, что области разбиения суть ячейки мозаики, содержащиеся в U. Для сферических мозаик эта теорема не имеет места, потому что здесь U может состоять из целой сферы, которую можно разбить на части сколь угодно малого периметра.

Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — области и $c_1, \ldots, c_n$ — их выпуклые оболочки. Рассмотрим объединение всех 4 ячеек мозаики, которые имеют внутренние или граничные точки, общие с областями $c_1, \ldots, c_n$, и, кроме того, пополним множество этих ячеек, добавляя, если нужно, новые ячейки мозаики, чтобы получилось односвязное множество $\bar{U}$. Обозначим ячейки мозаики, входящие в $\bar{U}$, но не входящие в $\bar{U}$, через $c_{n+1}, \ldots, c_m$, и применим к областям $c_1, \ldots, c_m$ процесс стягивания, который был описан для случая сферы. Тем самым мы получим множество выпуклых многоугольников, заполняющих $\bar{U}$ без перекрытий и без пропусков (рис. 4). Если число этих многоугольников меньше m, то мы разобъем некоторые из них на выпуклые многоугольники так, чтобы в общем получилось точно m многоугольников $p_1, \ldots, p_m$. Эти разбиения мы осуществляем так, чтобы на границе $\bar{U}$ не было новых вершин. Нам нужно доказать, что $p \geqslant \lambda$, где через p обозначен наибольший периметр, встречающийся среди многоугольников, и равенство при этом выполняется только в том случае, когда $p_1, \ldots, p_m$ совпадают с ячейками мозаики, содержащимися в $\bar{U}$. Основные моменты доказательства следующие.

Вследствие изопериметрического свойства правильных многоугольников мы имеем

$$p_i \leqslant A(\nu_i, p),$$

где

$$A(\nu, p) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{4} \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{\nu} & \text{в евклидовом случае} \\ \\ -2\pi + 2\nu \arccos \dfrac{\cos \frac{\pi}{\nu}}{\operatorname{ch} \frac{p}{2\nu}} & \text{в гиперболическом случае} \end{cases}$$

С одной стороны, доказывается, что $A(\nu, p)$ — вогнутая *, возрастающая функция от ν при $\nu > 2$, а с другой — покажем, что

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \leqslant m\nu,$$

где ν — число сторон ячеек мозаики. Поэтому

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{m} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} A(\nu_i, p) \leqslant mA(\nu, p),$$

откуда $p \geqslant \lambda$ и равенство имеет место лишь когда каждый многоугольник является правильным ν-угольником с площадью $\bar{U}/m$. А из вогнутости функции $A(\nu, p)$ и существования $\lim\limits_{\nu \to \infty} A(\nu, p)$ вытекает монотонность $A(\nu, p)$.

При доказательстве неравенства $\nu_1 + \ldots + \nu_m \leqslant m\nu$ можно предполагать, что в каждой вершине мозаики, состоящей из многоугольников $p_1, \ldots, p_m$, сходится не больше трех многоугольников. Для этого вершину со сходящимися в ней $3+h$ $(h>0)$ ребрами можно всегда заменить h трехгранными вершинами так, что число многоугольников останется прежним, в то время как общее число их сторон возрастет. Пусть v_2 и v_3 — числа соответственно двугранных и трехгранных вершин, лежащих на границе $\bar{U}$, v — общее число вершин и e — число ребер. Согласно формуле Эйлера имеем

$$m + v = e + 1.$$

---

* Доказательство вогнутости функции $A(\nu, p)$ при переводе опущено.

Таким образом, вследствие того что $3v=2e+v_2$, получаем

$$\nu_1+\ldots+\nu_m=2e-v_2-v_3=6m+v_2-v_3-6.$$

Те же самые выкладки приводят в случае правильного разбиения $\bar{U}$ к соотношению

$$m\nu=6m+v_2-v_3-6.$$

Но поскольку значения v_2 и v_3 здесь те же, что и выше, то имеем

$$\nu_1+\ldots+\nu_m=m\nu.$$

Этим доказательство завершается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М., «Наука», 1966.
2. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. М., Гостехиздат, 1951.
3. Гильберт Д. и Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М., Гостехиздат, 1951.
4. Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., Физматгиз, 1958.
5. Харари Ф. Теория графов. М., «Мир», 1973.
6. Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры. М., «Наука», 1966.
7. Дынкин Е. Б. и Успенский В. А. Математические беседы. М., Гостехиздат, 1952.
8. Донец Г. А. О нижней границе числа веришин плоских критических графов. Кибернетика, 4 (1971), 76—85.
9. Теория графов. Сборник переводов. М., «Мир», 1974.

ДЕЛОНЕ Борис Николаевич, составитель
ДОЛБИЛИН Николай Петрович, переводчик

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. Сборник

Редактор В. И. Ковалев
Обложка Л. П. Ромасенко
Худож. редактор В. Н. Конюхов
Техн. редактор Т. В. Самсонова
Корректор Л. И. Добролюбцева

А 10766. Индекс заказа 54309 Сдано в набор 26/VI 1975 г.
Подписано к печати 13/VIII 1975 г. Формат бумаги 84×108[1]/32.
Бумага типографская № 3 Бум. л. 1,0 Печ. л. 2,0 Усл.-печ. л. 3,36
Уч.-изд. л. 3,26 Тираж 67 667 экз. Заказ 1346 Цена 11 коп.
Издательство «Знание». 101835 Москва, Центр, проезд Серова д. 4
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области